TOMO XLIV (A) **Núms. 3 y 4. - MARZO - ABRIL 1948**

ANALES DE LA REAL SOCIEDAD ESPAÑOLA DE FISICA Y QUIMICA

SERIE A — FISICA

ORGANO DE LOS INSTITUTOS DE FISICA DEL
CONSEJO SUPERIOR DE INVESTIGACIONES CIENTIFICAS

SUMARIO

TODA LA CORRESPONDENCIA, TANTO CIENTIFICA, COMO ADMINISTRATIVA, DEBE DIRIGIRSE A **REAL SOCIEDAD ESPAÑOLA DE FISICA Y QUIMICA.**—FACULTAD DE CIENCIAS, SECCION DE FISICA.—TELEFONO 23-80-96 (CIUDAD UNIVERSITARIA)

8. CONSIDERACIONES SOBRE EL COMA Y SOBRE LA ABERRACION DEL SENO, *por* C. MORAIS.

SUMMARY

The author gives a demonstration for the sine condition and determines, by means of simple expansions into series, the expression for the seggital coma of the third and fifth orders foreseen when the sine condition is not satisfied. Tolerances for the saggital coma are also studied.

El coma es el error que causa más daño a la imagen en los sistemas ópticos. En efecto, mientras la aberración esférica admite infinitos planos de simetría, mientras el astigmatismo admite dos planos de simetría, el coma, por no tener más que un solo plano de simetría, produce en la imagen una deformación asimétrica, y siendo el ojo particularmente sensible a toda forma de asimetría, el coma resulta especialmente dañoso y, en cuanto sea posible, debe eliminarse.

Mientras que para conocer el estado de corrección del coma para los puntos alejados del eje óptico, es decir, para los grandes campos, es necesario proceder al cálculo trigonométrico; existe una relación matemática sencilla, la cual—conocido el estado de corrección del sistema en el eje—permite prever, con cualquier apertura, el estado de corrección para los campos pequeños. Esta relación matemática es la relación del seno, que, encontrada por Clausius por consideraciones energéticas, ha sido aplicada por Abbe a la óptica, particularmente a los objetivos de microscopio.

Es sabido que, conocido el camino óptico que desde el objeto conduce a un punto A′ imagen, el que conduce a un punto B′ infinitamente próximo se obtiene agregando al rayo que pasa por A′ la proyección de A′B′ sobre el mismo rayo, multiplicada por el índice del medio en el cual se halla el segmento A′B′.

Consideramos ahora dos puntos, objeto e imagen, situados sobre el eje de un sistema óptico, y sea AH, ..., KA′ el camino recorrido por un rayo de apertura angular α, al pasar de A a A′. Indicamos este camino óptico con $\varphi_{AA'}$. Tracemos desde A la normal al eje y tomemos sobre esta normal un punto B infinitamente próximo a A. Sea su imagen B′. Con el fin de que nuestra consi-

deración sea lo más general posible, supongamos que el rayo incidente AH esté en un plano π que pasa por el eje óptico y forma con el plano del dibujo un ángulo τ.

Como por hipótesis, el instrumento goza de simetría de revolu-

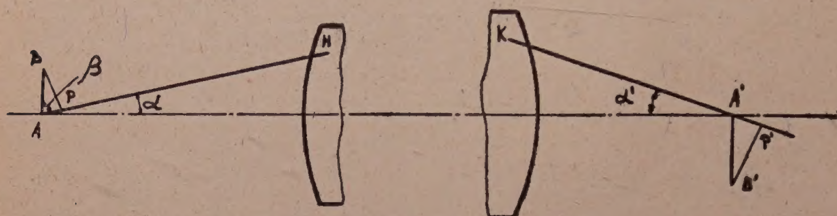


Figura 1

ción alrededor del eje AA', también el rayo emergente KA' estará sobre el plano π.

Trazamos desde B la normal AH y desde B' la normal a A'H'. El ángulo β que el segmento AB forma con el rayo AH es:

$$\cos \beta = \operatorname{sen} \alpha . \cos \tau \qquad [1]$$

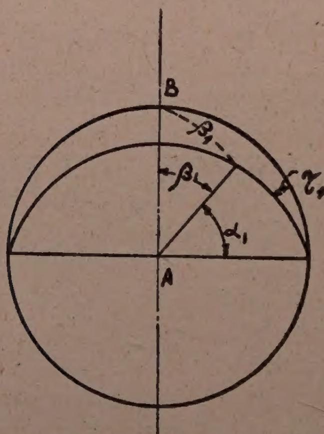


Figura 2

y análogamente el correspondiente ángulo β' relativo al rayo emergente es:

$$\cos \beta' = \operatorname{sen} \alpha' \cos \tau \qquad [2]$$

El camino óptico que desde B lleva a B' será, por tanto, igual al que desde A conduçe a A', aumentado en las proyecciones de los segmentos AB y A'B' sobre los rayos correspondientes, mul-

tiplicados por los índices de refracción respectivos. Es decir, que podemos escribir:

$$\varphi_{BB'} = \varphi_{AA'} - n\,AB\,\text{sen}\,\alpha\cos\tau + n'\,A'B'\,\text{sen}\,\alpha'\cos\tau \qquad [3]$$

Como por hipótesis, el sistema óptico es de revolución, y además A' es la imagen de A para la apertura considerada, $\varphi_{AA'}$ es independiente del ángulo τ. Si queremos que para la apertura dada y para toda la zona del rayo OH el camino óptico BB' resulte constante, tendrá que ser evidentemente, cualquiera que sea τ:

$$\cos\tau \{ n'\,A'B'\,\text{sen}\,\alpha' - n\,AB\,\text{sen}\,\alpha \} = \text{constante} \qquad [4]$$

lo cual exige que sea:

$$n'\,A'B'\,\text{sen}\,\alpha' - n\,AB\,\text{sen}\,\alpha = 0$$

o bien:

$$\frac{A'B'}{AB} = \frac{n\,\text{sen}\,\alpha}{n'\,\text{sen}\,\alpha'} \quad \{(\text{para } \alpha = \text{constante})\}$$

Cuando la [5] se cumple, todos los caminos ópticos que desde B llevan a B' gozan de simetría de revolución, en el sentido que cualquiera que sea τ es:

$$\varphi_{BB'} = \text{constante}$$

para la apertura considerada.

Si el sistema está corregido de aberración esférica, todos los caminos ópticos que desde A, independiente del valor de α, llevan a A' son constantes. Luego si en este caso se quiere que B' resulte la imagen corregida de B para todas las aberturas, será necesario que la [5] se cumpla para cada valor de α. Por el contrario, si existe aberración esférica, para una apertura α_1, el sistema óptico dará de A una imagen A'_1 y en correspondencia se tendrá de B una imagen B'_1 situada sobre la normal trazada por A'_1; esta imagen B'_1 habrá de cumplir la condición:

$$\frac{A'_1 B'_1}{AB} = \frac{n\,\text{sen}\,\alpha_1}{n'\,\text{sen}\,\alpha'_1}$$

Para otra superficie se tendrá respectivamente una imagen A'_2 sobre el eje y B'_2 sobre la normal al eje trazado por A'_2 y será:

$$\frac{A'_2 B'_2}{AB} = \frac{n \operatorname{sen} \alpha_2}{n' \operatorname{sen} \alpha'_2}$$

y finalmente para la zona paraxial se tendrán las imágenes A'_p sobre el eje y B'_p sobre la normal al eje trazada por A'_p y deberá ser:

$$\frac{A'_p B'_p}{AB} = \frac{n \alpha'_p}{n' \alpha'_p}$$

Se demostrará más adelante que los puntos B' que cumplen la con-

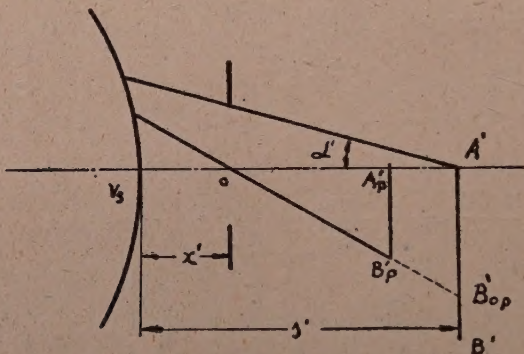


Figura 3

dición [5] son las imágenes que los rayos sagitales correspondientes a las aberturas requeridas dan del punto B.

De lo dicho se deduce que a estos puntos B' llega en fase toda la luz relativa a la apertura para la cual B' debe ser considerado imagen de B.

Consideramos la última superficie de un sistema óptico, y para tratar el caso más general, supongamos aún que el diafragma esté desplazado en una cierta magnitud x' respecto a la última superficie del sistema.

En correspondencia a la apertura α' la imagen de B será B', mientras para la apertura paraxial será B'_p. El rayo principal será, por tanto, OB'_p. Prolongamos este rayo hasta encontrar en B'_{o_p} al segmento A'B', y, según se demostrará, el punto B' está dado por el punto de intersección de los rayos sagitales de apertura α' con el plano meridiano; el segmento $B'B'_{o_p}$, que puede preverse en los

límites de aplicación de la condición del seno, se denomina coma sagital.

Por la figura tenemos:

$$\frac{A'B'_{o_p}}{A'_p B'_p} = \frac{s' - x'}{s'_p - x'} \qquad A'B'_{o_p} = A'_p \cdot B'_p \frac{s' - x'}{s'_p - x'}$$

y puesto que

$$A'_p B'_p = \frac{n}{n'} \frac{\alpha}{\alpha'} AB$$

podemos también escribir:

$$A'B'_{o_p} = \frac{n}{n'} \frac{\alpha}{\alpha'} AB \frac{s' - x'}{s'_p - x'}$$

Como además:

$$A'B' = \frac{n}{n'} \frac{\operatorname{sen} \alpha}{\operatorname{sen} \alpha'} AB$$

será

$$\text{coma sagital} = B'B'_{o_p} = A'B' - A'B'_{o_p} = \frac{n}{n'} AB \left\{ \frac{\operatorname{sen} \alpha}{\operatorname{sen} \alpha'} - \frac{\alpha}{\alpha'} \frac{s' - x'}{s'_p - x'} \right\}$$

$$= A'B'_{o_p} \left\{ \frac{\operatorname{sen} \alpha}{\alpha} \frac{\alpha'}{\operatorname{sen} \alpha'} \frac{s'_p - x'}{s' - x'} - 1 \right\} \qquad [6]$$

Para el desarrollo en serie de la [6] observemos que por ser

$$A'B'_{o_p} = A'_p B'_p \frac{s' - x'}{s'_p - x'} = A'_p B'_p \left\{ 1 + \frac{A.\,E.}{s'_p - x'} \right\}$$

poniendo, como de costumbre, la aberración esférica bajo la forma:

$$A.\,E. = a\,h_1^2 + b\,h_1^4$$

y sustituyendo en la anterior, se tiene:

$$A'B'_{o_p} = A'_p B'_p \left\{ 1 + \frac{a\,h_1^2}{s'_p - x'} + \frac{b\,h_1^4}{s'_p - x'} \right\}$$

Veamos ahora que la proporción

$$\frac{\operatorname{sen} \alpha}{\operatorname{sen} \alpha'}$$

no cambia de signo al variar de modo α, que desarrollando, en función de h_1, hemos de tener en cuenta sólo las potencias pares, y puesto que todavía con aperturas muy pequeñas se tiene:

$$\frac{\operatorname{sen} \alpha}{\operatorname{sen} \alpha'} = \frac{\alpha}{\alpha'}$$

podemos escribir:

$$\frac{\operatorname{sen} \alpha}{\operatorname{sen} \alpha'} \frac{\alpha'}{\alpha} = 1 + A\, h_1^2 + B\, h_1^4 \ldots$$

Tenemos, también:

$$\frac{s'_p - x'}{s' - x'} = \frac{s'_p - x'}{s'_p - x' + AE} = 1 - \frac{AE}{s'_p - x'} + \frac{\overline{A.\,E.}^2}{(s'_p - x'_p)^2} + \ldots$$

Sustituyendo en [6] se encuentra fácilmente el coma sagital, que indicaremos con las iniciales C. S.

$$\text{C.S.} = A'_p B'_p \left\{ h_1^2 \left(A - \frac{a}{s'_p - x'} \right) + h_1^4 \left(B - \frac{b}{s'_p - x'} \right) \right\} \quad [7]$$

Denominaremos coma sagital derivado de la condición del seno del tercero y quinto orden, respectivamente, los términos en h_1^2 y h_1^4.

La [7] nos dice, por tanto, que el coma sagital derivado de la condición del seno varía con la primera potencia del campo y con las potencias pares de la apertura.

En general, en los objetivos comunes y en los fotográficos se da por nula la [7] para la máxima apertura.

Antes de proseguir en nuestro estudio vamos a hacer algunas observaciones sobre la [7].

Como hemos dicho, la [7] vale para aperturas fuertes, pero para campos pequeños. Campos pequeños significa que la cota de incidencia k_1 del rayo principal es tan pequeña que se pueden despreciar las potencias superiores a la segunda (admitiendo que el diafragma no esté demasiado lejos de la superficie), de manera que

las x' que aparecen en la [7] son magnitudes paraxiales. Si, por el contrario, los campos aumentasen, tendríamos que poner (denominando a_x el coeficiente de la esférica correspondiente al rayo principal):

$$x' = x'_p + a_x k_1^2$$

y, por tanto,

$$\frac{1}{s'_p - x'} = \frac{1}{s'_p - x'_p - a_x k_1^2} = \frac{1}{(s'_p - x'_p)\left(1 - \frac{a_x}{s'_p - x'_p} k_1^2\right)} =$$

$$= \frac{1}{s'_p - x'_p} + \frac{a_x}{(s'_p - x'_p)^2} k_1^2$$

de suerte que la [7] se transforma:

$$\text{C. S.} = A'_p B'_p \left\{ h_1^2 \left[A - \frac{a}{s'_p - x'_p} - \frac{a}{(s'_p - x'_p)^2} k_1^2 a_x \right] + h_1^4 \left(B - \frac{b}{s'_p - x'_p} \right) \right\}$$

$$= A'_p B'_p \left\{ h_1^2 \left[A - \frac{a}{s'_p - x'_p} \right] + h_1^4 \left(B - \frac{b}{s'_p - x'_p} \right) \right\} - \frac{a \cdot a_x}{(s'_p - x'_p)^2} A'_p B'_p k_1^2 h_1^2 \quad [7']$$

Aparece, por tanto, en la [7] un término que depende del cubo del campo. Pero como la [7] sólo es válida para campos pequeños, es lógico esperar que caiga en defecto cuando el campo es de tal orden que haya que tener en cuenta la aberración esférica de la pupila, de manera que al efectuar comprobaciones trigonométricas del coma sagital para los campos de cierta extensión, encontraríamos diferencias, tal vez considerables, entre el resultado del cálculo trigonométrico y el obtenido aplicando la [7] o bien la [7'].

Si vamos a efectuar la comprobación trigonométrica del coma sagital y desarrollamos el coma encontrado en potencias del campo, limitándonos a las no superiores a la 3.ª, encontraremos:

$$\text{C. S.} = P.\, A'_p B'_p + Q.\, \overline{A'_p B'_p}^3 \qquad [8]$$

en que P y Q son funciones de la apertura:

$$P = h_1^2 \left(A - \frac{a}{s'_p - x'_p} \right) + h_1^4 \left(B - \frac{b}{s'_p - x'_p} \right)$$

Si tenemos en cuenta que k_1 es proporcional a AB y, por consiguiente, a $A'_pB'_p$, denominando p a este coeficiente de proporcionalidad, se obtiene, para el último término de la [7'], la expresión siguiente:

$$- \frac{a \cdot a_x}{(s'_p - x'_p)^2} p \; \overline{A'_p B'_p}^3 h_1^2$$

El último coeficiente, Q, de la [8] puede, por tanto, ponerse en la forma:

$$Q = h_1^2 \left\{ S - \frac{a \, a_x}{(s'_p - x'_p)^2} p \right\}$$

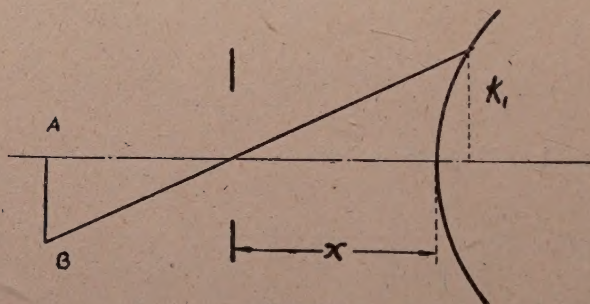


Figura 4

donde el coeficiente S es el término del coma que la relación [7'] es incapaz de prever.

Mientras en el coma sagital previsto por la condición del seno la abscisa del diafragma aparece con la primera potencia, el coeficiente Q nos dice que en el caso más general del quinto orden el coma sagital depende también de las potencias superiores de la abscisa del diafragma.

Con una sola comprobación trigonométrica del coma sagital podemos, pues, encontrar el coeficiente S, de manera que el coma sagital en su expresión más general del tercero y quinto orden puede ponerse en la forma:

$$C.S. = h_1^2 \left(A - \frac{a}{s'_p - x'_p} \right) A'_p B'_p + h_1^4 \left(B - \frac{b}{s'_p - x'_p} \right) A'_p B'_p +$$

$$+ h_1^2 \overline{A'_p B'_p}^3 \left\{ S - \frac{a \cdot a_x}{(s'_p - x'_p)^2} p \right\} \qquad [9]$$

Como veremos en lo sucesivo, en lugar de hacer las comprobaciones trigonométricas de los rayos sagitales, que son muy largas,

es preferible comprobar el coma tangencial y obtener el sagital por las relaciones que existen entre los coeficientes del coma sagital y los correspondientes del tangencial.

Partiendo de la [7] estamos en condiciones de dar la expresión del seno en los límites del tercero y quinto orden, es decir, las expresiones explícitas de los coeficientes

$$A - \frac{a}{s'_p - x'} \qquad B - \frac{b}{s'_p - x'}$$

que aparecen en la [7].

Coma sagital del tercer orden para S superficies:

$$C.S. = A'_p B'_p \left| \sum_{i=1}^{i=S-1} \frac{A \cdot E_i}{s'_{i_p}} \left(1 - \frac{h_1}{h_{i+1}}\right) - \frac{A.S._s}{s'_{s_p}} \frac{x'_s}{s'_p - x'_s} - \frac{A \cdot E_0}{s_1} - \right.$$
$$\left. - \frac{1}{2} h_1^2 \sum_{i=1}^{i=S} \left(\frac{h_i}{h_1}\right)^2 Q_i \left(\frac{1}{n_i s'_i} - \frac{1}{n_i s_i}\right) \right| \qquad [10]$$

La [10] muestra claramente la influencia que sobre el coma del tercer orden tienen los espesores y las distancias. $A . E_0$ es la aberración esférica del objeto, $A . E_i$ la aberración esférica después de la i^{ma} superficie.

El coma sagital de quinto orden, previsto por la condición del seno, es, por tanto:

$$C.S. = A'_p B'_p \left| h_1^4 \sum_{i=1}^{i=S} \left(\frac{h_i}{h_1}\right)^4 b_i + \right.$$
$$\left. + h_1^4 \sum_{i=1}^{i=S} \left(\frac{h_i}{h_1}\right)^2 a_i \sum_{t=1}^{t=i=1} \left(\frac{h_t}{h_1}\right)^2 a_t - \frac{A \cdot E_s}{s'_p - x'_p} \right| \qquad [11]$$

en que a_i, a_t son los coeficientes de la aberración esférica de tercer orden respectivamente después de la i^{ma} y la t^{ma} superficie y b_i es el análogo de quinto orden. Con $A\ E_s$ hemos indicado la aberración esférica de quinto orden después de todo el sistema. Recordamos que, además del coma de quinto orden expresado por la [11], existe, como indica la [9], otro coma que varía con el cuadrado de la apertura y con el cubo del campo, cuya influencia es considerable en los sistemas de campo grande, por ejemplo los objetivos fotográficos y los oculares.

Tomemos de nuevo la [10]. Esta nos da, en los límites del tercer orden, el valor del segmento $B'B'_{o_p}$, desplazamiento del punto B′ respecto al B'_{o_p}, en el cual el rayo principal encuentra al segmento A′B′. Al punto B′ llega en fase la luz que corresponde a una zona dada del sistema. Se puede demostrar que dicho punto B′ coincide con el punto en el cual los rayos sagitales correspondientes a la apertura dada encuentran al plano meridiano.

En efecto, fácilmente se demuestra que la [10] puede ponerse bajo la forma:

$$\mathrm{C.\,S.} = -\frac{s'_s}{2\,n'}\,\frac{h_1^3}{h_s}\,k_1\,s_2$$

en que

$$S_2 = \sum_{i=1}^{i=S}\left(\frac{h_i}{h_1}\right)^3 \frac{k_i}{k_1}\,Q_{o_i}\,Q_{x_i}\left\{\frac{1}{n_i\,s'_i} - \frac{1}{n_i\,s_i}\right\}$$

es la segunda suma de Seidel. Como es sabido, la [12] nos da el valor del coma sagital, mientras que para obtener el tangencial es necesario multiplicar por tres el valor de la [12].

Veamos ahora cuáles son las tolerancias del coma. Con este

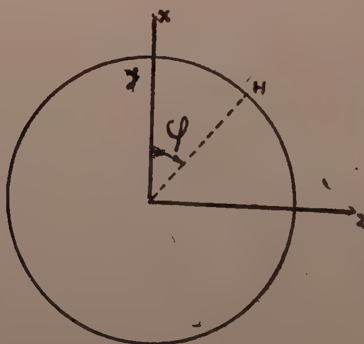


Figura 5

objeto tomamos otra vez la figura 3. B'_p es el punto de encuentro del plano imagen con el rayo principal. Si B'_p fuera la imagen corregida, toda la luz llegaría en fase a B'_p, pero como suponemos que existen coma y esférica en B'_p habrá diferencia de camino óptico conforme al recorrido seguido por la luz.

Consideremos, por ejemplo, un rayo que, partiendo del punto

objeto, encuentra el plano del diafragma en un punto H de coordenadas

$$y = r \cos \varphi$$
$$z = r \operatorname{sen} \varphi$$

Se demuestra entonces que la diferencia de camino óptico entre la luz que se ha propagado a lo largo del rayo principal y la que ha seguido el camino determinado por el rayo azimut φ para llegar a B'_p es (de existir solamente coma y esférica):

$$\Delta \varepsilon' = - \frac{h_1^4}{8} S_1 - \frac{h_1^3 k_1}{2} S_2 \cos \varphi$$

si S_1 y S_2 son la primera y la segunda suma de Seidel.

Desplacemos ahora desde B'_p un segmento de componentes $\Delta x'$ y $\Delta y'$. Ya sabemos que si: $\cos \alpha'$, $\cos \beta'$, $\cos \gamma'$ son los cosenos directores del rayo refractado correspondiente a uno incidente de azimut φ, el camino de la luz que ha seguido este rayo se incrementa en $(\Delta x' \cos \alpha' + \Delta y' \cos \beta') n'$, mientras que si: $\cos \alpha'_0$, $\cos \beta'_0$ son los cosenos del rayo principal refractado a la salida del sistema óptico, el camino de la luz correspondiente se incrementa en:

$$(\Delta x' \cos_1 \alpha'_0 + \Delta y' \cos_2 \beta'_0) n'$$

La diferencia de estos incrementos resulta entonces:

$$[\Delta x' \{\cos \alpha' - \cos \alpha'_0\} + y \{\cos \beta' - \cos \beta'_0\} n'] \qquad [13]$$

Ahora es fácil demostrar que en los límites de la óptica de primer orden

$$\cos \alpha' = 1 - \frac{1}{2} \left\{ \frac{k_s^2}{x'^2_s} + 2 \frac{h_s k_s}{s'_s x'_s} \cos \varphi + \frac{h_s^2}{s'^2_s} \right\}$$

$$\cos \beta' = - \left\{ \frac{k_s}{x'_s} + \frac{h_s}{s'_s} \cos \varphi \right\}$$

$$\cos \gamma' = - \frac{h_s}{s'_s} \operatorname{sen} \varphi$$

donde s'_s y x'_s son las abscisas paraxiales respectivamente de la imagen y del diafragma de salida.

Para el rayo principal tendremos que poner en la anterior $h_s=0$ y, por tanto, obtenemos:

$$\cos\alpha' - \cos\alpha'_0 = -\frac{1}{2}\left\{2\frac{h_s k_s}{s'_s x'_s}\cos\varphi + \frac{h_s^2}{s'^2_s}\right\}$$

$$\cos\beta' - \cos\beta'_0 = -\frac{h_s}{s'_s}\cos\varphi$$

$$\cos\gamma' - \cos\gamma'_0 = -\frac{h_s}{s'_s}\operatorname{sen}\varphi$$

de manera que en los límites del tercer orden podemos escribir la [13] de esta forma:

$$-\frac{1}{2}\left\{2\frac{h_s k_s}{s'_s x'_s}\cos\varphi + \frac{h_s}{s'^2_s}\right\}\Delta x' - \frac{h_s}{s'_s}\cos\varphi\,\Delta y' \qquad [13']$$

Supongamos ahora que se trata de calcular la diferencia de camino óptico entre la luz que ha seguido el camino arbitrario determinado por el azimut φ y por la apertura h_1 y la que ha seguido el rayo principal, en el foco sagital B'_z relativo a la apertura h_{1_z}.

Se puede calcular, por medio de la expresión que da $\Delta\varepsilon'$, la diferencia de camino óptico en B'_p; para conocer la diferencia en B'_z hay que agregar la diferencia de los incrementos debidos al desplazamiento $B'_pB'_z$.

Este desplazamiento puede ser realizado en dos tiempos, es decir, que podemos desplazarnos primeramente desde B'_p a $B'_{o_{p_z}}$, donde $B'_{o_{p_z}}$ es el punto de encuentro del rayo principal con el plano normal al eje que contiene el foco sagital B'_z de la zona de rayo h_{1_z}, y en lo sucesivo tendremos que desplazarnos desde $B'_{o_{p_z}}$ a B'_z. Por brevedad prescindimos del subfijo s relativo a la última superficie y sean h' y k' las alturas del rayo emergente.

Como el segmento $B'_pB'_{o_{p_z}}$ tiene por componentes:

$$\Delta x' = \text{A. E.} = -\frac{1}{2}h_{1_z}^2\left(\frac{h_{1_z}}{h'_z}\right)^2\frac{s'^2_s}{n'}s_1 = a\,h_{1_z}^2$$

$$\Delta y' = A'B'_{o_{p_z}} - A'_pB'_p = A'_pB'_p\frac{s'_z - x'}{s'_p - x'} - A'_pB'_p =$$

$$= A'_pB'_p\frac{s'_z - x' - s'_p + x'}{s'_p - x'_p} = A'_pB'_p\frac{a\,h_{1_z}^2}{s'_p - x'_x}$$

De esta forma resulta que la diferencia de incremento de camino óptico en $B'_{o_{p_z}}$ está dada por:

$$\left| -a h_{1_z}^2 \frac{1}{2} \left\{ 2 \frac{h' k'}{s' x'} \cos \varphi + \frac{h'^2}{s'^2} \right\} - A'_p B'_p \frac{a h_{1_z}^2}{s'_p - x'_p} \frac{h'}{s'} \cos \varphi \right| n' \quad [14]$$

Notemos ahora que: $\frac{h'}{x} = - \frac{A'_p B'_p}{s' - x'}$

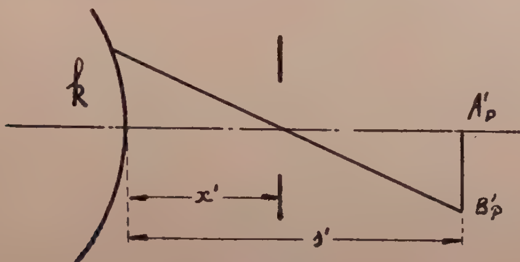


Figura 6

y por tanto la [14] será:

$$n' \left\{ - \frac{h' k'}{s' x'} a h_{1_z}^2 \cos \varphi - \frac{1}{2} \frac{h'^2}{s'^2} a h_{1_z}^2 + \frac{h' k'}{x' s'} a h_{1_z}^2 \cos \varphi \right\}$$

$$= - \frac{1}{2} n' \frac{h'^2}{s'^2} a h_{1_z}^2 = \frac{1}{4} h'^2 \left(\frac{h_{1_z}}{h'_z} \right)^2 \frac{s'^2}{u'} S_1 n' \frac{h'^2}{s'^2} = \frac{1}{4} S_1 h_1^2 h_{1_z}^2 \quad [14']$$

Desplacémonos ahora de $B'_{o_{p_z}}$ al punto B'_z correspondiente al foco sagital de la zona de rayo h_{1_z}. Sabemos que:

$$B'_z B'_{o_{p_z}} = - \frac{s'}{2 n'} \frac{h_{1_z}^3}{h'_z} k_1 S_2$$

y; por consiguiente, siendo en este caso

$$\Delta x' = 0 \qquad \Delta y' = B'_z B'_{o_{p_z}}$$

resulta que la diferencia de incremento de camino óptico es:

$$- \frac{h'_s}{s'_s} B'_z B'_{o_p} \cos \varphi \, n' \quad [15]$$

Para obtener entonces la diferencia de camino óptico al foco sagital B'_z correspondiente a la zona h_1 es necesario, según ya

hemos dicho, adicionar a la diferencia de camino óptico $\Delta\varepsilon'$ en el punto B'_p los incrementos [14'] y [15], obteniendo:

$$\Delta \varepsilon_{B'_z} = -\frac{h_1^4}{8} S_1 - \frac{h_1^3 k_1}{2} S_2 \cos\varphi + \frac{1}{4} S_1 h_{1_z}^2 - B'_z B_{o_{p_z}} \cos\varphi\, n'$$

Como la razón $\frac{h_1}{h'_s}$ es independiente de la zona considerada, podemos también escribir:

$$B'_z B'_{o_{p_z}} = -\frac{s'}{2n'} \frac{h_{1_z}^3}{h'_{s_z}} k_1 s_2 = -\frac{s'_s}{2n'} \left(\frac{h_1}{h'_s}\right) h_{1_z}^2 k_1 s_2$$

y por tanto:

$$\Delta \varepsilon'_{B'_z} = -\frac{h_1^2}{8} S_1 \left[h_1^2 - 2h_{1_z}^2\right] - \frac{h_1^3 k_1}{2} s_2 \cos\varphi + \frac{h_1}{2} h_{1_z}^2 k_1 S_2 \cos\varphi$$

$$= -\frac{h_1^2}{8} S_1 \left[h_1^2 - 2h_{1_z}^2\right] - \frac{h_1 k_1}{2} S_2 \cos\varphi \left[h_1^2 h_{1_z}^2\right] \qquad [16]$$

La [16] nos da, pues, la expresión de la diferencia de este camino óptico en el punto comático sagital relativo a una zona del rayo h_{1_z} entre la luz que ha seguido un recorrido arbitrario y la que se ha desplazado a lo largo del rayo principal.

Para el rayo tangencial superior la anterior se hará:

$$\Delta \varepsilon'_{\substack{B'_z\\ \varphi=0}} = -\frac{h_1^2}{8} S_1 \left[h_1^2 - 2h_{1_z}^2\right] + \frac{h_1 k_1}{2} S_2 \left[h_1^2 - h_{1_z}^2\right]$$

mientras que para el rayo tangencial inferior ($\varphi = 180°$)

$$\Delta \varepsilon'_{\substack{B'_z\\ \varphi=180}} = -\frac{h_1^2}{8} S_1 \left[h_1^2 - 2h_{1_z}^2\right] + \frac{h_1 k_1}{2} S_2 \left[h_1^2 - h_{1_z}^2\right]$$

Sustrayendo obtenemos la máxima diferencia de camino óptico en el foco sagital

$$-2\frac{h_1 k_1}{2} S_2 \left[h_1^2 - h_{1_z}^2\right] \qquad [17]$$

La [17] nos dice que esta diferencia de camino óptico se anula

evidentemente para $h_1 = 0$ y para $h_1 = h_{1_z}$, puesto que todos los caminos ópticos, correspondientes a una zona determinada, que desde el objeto llevan a la imagen sagital, son iguales entre sí.

Entre $h_1 = 0$ y $h_1 = h_{1_z}$ debe, por tanto, encontrarse un valor de h_1 que hace máxima la [17]. Derivando entonces la [17] respecto a h_1 e igualando a cero se tiene:

$$h_1^2 - h_{1_z}^2 + 2\,h_1^2 = 0$$

que queda satisfecha para:

$$h_1 = \frac{1}{\sqrt{3}}\,h_{1_z}$$

Sustituyendo este valor particular de h_1 en la [17] se obtendrá:

$$2\,\frac{h_{1_z}}{2\sqrt{3}}\,k_1\,S_2\left[\frac{h_{1_z}^2}{3} - h_{1_z}^2\right] = \frac{4}{6\sqrt{3}}\,h_{1_z}^3\,k_1\,S_2 \qquad [18]$$

Para rayos marginales la [17] nos da:

$$-\,2\,\frac{h_{1_m}\,k_1}{2}\,S_2\left[h_{1_m}^2 - h_{1_z}^2\right] \qquad [19]$$

y los mejores resultados se lograrán evidentemente cuando nos refiramos al foco sagital de aquella zona para lo cual los valores de las [18] y [19] son iguales y de signo contrario, es decir, para aquel valor de h_{1_z} que satisface la relación:

$$-\frac{4}{6\sqrt{3}}\,h_{1_z}^3\,k_1\,S_2 = -\,2\,\frac{h_{1_m}\,k_1}{2}\,S_2\left[h_{1_m} - h_{1_z}^2\right]$$

Tenemos así la siguiente ecuación de condición:

$$h_{1_m}^3 - h_{1_m}\,h_{1_z}^2 - \frac{2}{\sqrt{3}\cdot 3}\,h_{1_z}^3 = 0$$

que admite una raíz:

$$h_{1_z} = 0{,}866\,h_{1_m}$$

y dos raíces dobles $L_1 = -\sqrt{3}\,h_{1_m}$ que no tienen interés.

Sustituyendo en [19] la primera solución se obtendrá:

$$-2\,\frac{h_{1_m} k_1}{2}\,S_2\left[h_{1_m}^2 - 0{,}75\,h_{1_m}^2\right] = -\frac{1}{2}\,\frac{h_{1_m}^3 k_1}{2}\,S_2 \qquad [20]$$

y esta diferencia ha de valer a lo sumo $\frac{\lambda}{4}$ si queremos satisfacer la regla de Lord Rayleigh.

Es decir, que deberá ser:

$$-\frac{1}{2}\,\frac{h_{1_m}^3 k_1}{2}\,S_2 = \frac{\lambda}{4}$$

pero como:

$$-\frac{1}{2}\,\frac{h_{1_m}^3 k_1}{2}\,S_2 = -\frac{h'_s}{s'_s}\,n'\,\frac{1}{2}\,\frac{s'_s}{2\,n'}\,\frac{h_{1_m}^3}{h'_s}\,k_1\,S_2$$

y

$$-\frac{1}{2}\,\frac{s'_s}{n'}\,\frac{h_{1_m}^3 k_1}{h'_{s_m}}\,S_2$$

es el coma sagital relativo a la zona marginal, escribiremos, denominándolo con CS_{MX}:

$$-\frac{1}{2}\,n'\,\frac{h'_{s_m}}{s'_s}\,CS_{MX} = \frac{1}{2}\,n'\operatorname{sen}\alpha'\,CS_{MX} = \frac{\lambda}{4}$$

Por consiguiente:

$$CS_{MX} = \frac{\lambda}{2\,n'\operatorname{sen}\alpha'} \qquad [21]$$

En la práctica el valor tolerable del coma es mucho más elevado, pero, en sistemas particulares, como, por ejemplo, los objetivos de microscopio, esta tolerancia no debe superarse.

9. CONSIDERACIONES SOBRE LA ABERRACION ESFERO-CROMATICA, *por* C. Morais.

SUMMARY

Luminous waves of different colours are studied in order that from their reciprocal positions the value of the aberration of the wave may be obtained.
It is shown that the best correction is attained annuling the longitudinal chromatism to an opening equal to $1/\sqrt{2}$ of that of the maximum.
Tolerances are found for the paraaxial chromatism and for that of the abovementioned opening.

Consideremos dos radiaciones del espectro, respecto a las cuales haya de estar corregido el cromatismo del sistema óptico ; sean, por ejemplo, la C y F del hidrógeno.

Las abscisas paraxiales y zonales relativas a la línea C son :

$$s'_{p_c} \qquad s'_{z_c}$$

y las análogas para la línea F son :

$$s'_{p_F} \qquad s'_{z_F}$$

El cromatismo paraxial está dado entonces por :

$$s'_{p_F} - s'_{p_c}$$

y el zonal, por :

$$s'_{z_F} - s'_{z_c}$$

Si indicamos con AE_F y AE_c las aberraciones esféricas respecto a las dos radiaciones se tiene, evidentemente :

$$s'_{z_c} = s'_{p_c} + A.E._c$$

$$s'_{z_F} = s'_{p_F} + A.E._F$$

de donde, por sustracción :

$$s'_{z_F} - s'_{z_c} = s'_{p_F} - s'_{p_c} + A.E._F - A.E._c \qquad [1]$$

En la mayoría de los sistemas, para estudiar el cromatismo es suficiente considerar la tercera potencia de la apertura, de manera que en este caso podemos escribir:

$$A.E._F = a_F h_1^2, \qquad A.E._c = a_c h_1^2$$

Luego la [1] puede escribirse:

$$s'_{z_F} - s'_{z_c} = s'_{P_F} - s'_{P_c} + h^2_{1_z}\left[a_F - a_c\right] \qquad [2]$$

El término $h_1^2[a_F - a_c]$ representa la aberración esfero-cromática cuando nos limitamos a considerar la variación de la esférica de tercer orden al variar la longitud de onda de la luz incidente.

Para el borde la [2] resultará:

$$s'_{m_F} - s'_{m_c} = s'_{P_F} - s'_{P_c} + h^2_{1_m}\left[a_F - a_c\right]$$

y si queremos que el cromatismo marginal sea igual y contrario al paraxial, tendremos que escribir:

$$-\left[s'_{P_F} - s'_{P_c}\right] = s'_{P_F} - s'_{P_c} + h^2_{1_m}\left[a_F - a_c\right]$$

de donde se obtiene

$$h^2_{1m}\left[a_F - a_c\right] = -2\left[s'_{P_F} - s'_{P_c}\right]$$

La [2] puede entonces escribirse:

$$s'_{z_F} - s'_{z_c} = (a_F - a_c)\left(h^2_{1_z} - h^2_{1_m} \cdot \frac{1}{2}\right)$$

y el cromatismo se anula para

$$h_{1_z} = \frac{1}{\sqrt{2}}\, h_{1_m} \qquad [3]$$

La razón que nos aconseja corregir el sistema óptico para la apertura dada por la [3] sería arbitraria si no se hiciesen las consideraciones siguientes:

Supongamos en lo sucesivo que se ha corregido de cromatismo nuestro sistema para una apertura $h_{1_z} = \frac{1}{\sqrt{2}}\, h_{1_m}$.

Los rayos correspondientes a los valores C y F alcanzan, después de haber atravesado el sistema óptico, un foco F'_{c_F} común. En estas condiciones si el sistema estuviera perfectamente acromático

sobre toda la superficie, las ondas correspondientes a las líneas C y F coincidirían con la onda ideal esférica que tiene centro en F'_F.

Es sabido que en presencia de aberración esférica de tercer orden, la luz que, saliendo del objeto, ha recorrido el camino marginal, llega en fase con la que ha recorrido el camino paraxial a un punto que está alejado del foco paraxial un segmento igual a la mitad de la aberración esférica total, es decir, a un punto al cual corresponde una aberración esférica:

$$A.E. = \frac{1}{2} A.E._m$$

La apertura correspondiente es, evidentemente,

$$h_{1_z} = \frac{1}{\sqrt{2}} h_{1_m}$$

Consideramos entonces la luz correspondiente a la longitud de onda λ_c. El foco óptimo se tiene, por lo dicho anteriormente, en el punto F'_c desplazado del vértice de la última lente:

$$s'_{P_c} + \frac{1}{2} A.E_c = s'_{P_c} + \frac{1}{2} a_c h^2_{1_m}$$

y a este foco óptimo llegan en fase tanto la luz marginal como la paraxial, o con otras palabras, los caminos ópticos marginales C_{m_c} y paraxiales C_{P_c} son iguales, es decir:

$$C_{m_c} = C_{P_c}$$

Repitiendo el mismo razonamiento para la longitud de onda correspondiente a la línea F, resulta que el foco óptimo se tiene para el punto F'_F, el cual dista del vértice de la última superficie

$$s'_{P_F} + \frac{1}{2} A.E_F = s'_{P_F} + \frac{1}{2} a_F h^2_{1_m}$$

y también en este caso se observa que en F′ la luz marginal llega en fase respecto a la paraxial, es decir, que son iguales los caminos ópticos marginales y paraxiales que desde el objeto conducen al foco óptimo así calculado. Escribiremos

$$C_{P_F} = C_{m_F}$$

Tanto el foco F'_F como el F'_C a los cuales hemos aludido, se encuentran calculando trigonométricamente un rayo a una apertura

$h_{1_z} = \frac{1}{\sqrt{2}} h_{1_m}$. Si ahora para esta apertura corregimos el sistema óptico, los dos focos óptimos van a coincidir en el único foco F'_{c_F} en el cual, evidentemente, las luces correspondientes a las dos radiaciones llegan después de haber recorrido caminos marginales y paraxiales que cumplen la condición:

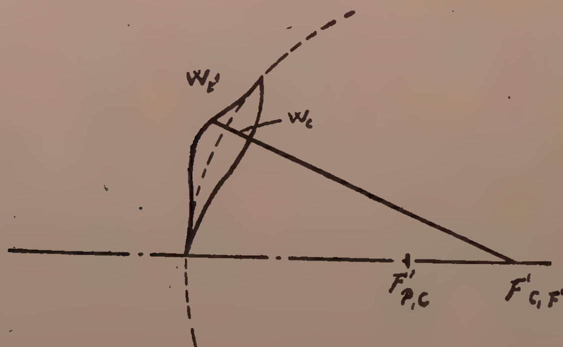
$$C_{m_F} - C_{P_F} = C_{m_c} - C_{P_c} = 0$$

cuya relación puede también escribirse:

$$C_{m_F} - C_{m_c} = C_{P_F} - C_{P_c}$$

Si luego ponemos

$$\Delta C_m = C_{m_F} - C_{m_c}; \qquad \Delta C_P = C_{P_F} - C_{P_c}$$



podemos decir que, corrigiendo el cromatismo para una zona $h_{1_z} = \frac{1}{\sqrt{2}} h_{1_m}$ se cumple la condición:

$$\Delta C_m - \Delta C_P = 0$$

la que, con mayor evidencia, puede escribirse:

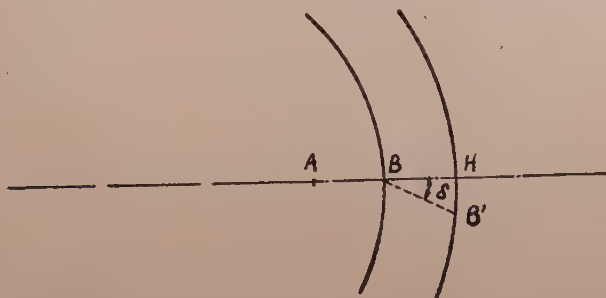
$$\frac{\partial}{\partial n} [C_m - C_P] = 0 \qquad [4]$$

Satisfecha la [4] respecto a la onda ideal con centro en F'_{c_F}, las dos ondas reales correspondientes a la longitud de onda λ_c y λ_F estarán dispuestas como en la figura.

Recordemos ahora una importante propiedad que goza el cami-

no óptico. Consideremos en un medio de índice n' una onda luminosa caracterizada por un cierto valor φ del camino óptico.

Sea un rayo AB, el cual, como sabemos, es normal a la onda luminosa, y sean p, q, r los cosenos directores del rayo. Queremos ver en cuánto se incrementa el camino óptico al pasar del punto B al B′ infinitamente próximo a B. Consideremos la onda luminosa que pasa por B′ y encuentra en H el rayo AB. Evidentemente, si



$\varphi + d\varphi$ es el camino óptico que caracteriza la onda que pasa por B′, la luz que saliendo del objeto llega a B′ habrá recorrido el camino $\varphi + d\varphi$, siendo

$$d\varphi = n' \cdot \mathrm{BH} = n' \, \mathrm{BB'} \cos\delta = n' \, [p dx + q dy + r dz]$$

si dx, dy, dz son las componentes del segmento BB′.

La importante relación a la que aludimos puede expresarse bajo la forma:

«Los caminos ópticos que la luz ha de recorrer para alcanzar dos puntos B, B′ infinitamente próximos, difieren entre sí el segmento BH de normal común a las dos ondas que pasan, respectivamente, por B y B′, multiplicado por el índice del medio que se considere.»

Aplicamos entonces cuanto hemos dicho al caso paraxial. F decir, consideramos un rayo del plano meridiano que parte de la última superficie de un punto de altura h' y sea s' la abscisa del punto en el cual dicho rayo encuentra el eje. Este rayo forma con el eje un ángulo pequeño, pero finito, $\frac{h'}{s'} = \alpha'$, y sus cosenos directores son, por tanto:

$$\cos\alpha' \qquad \operatorname{sen}\alpha' = \frac{h'}{s'} \qquad 0$$

Como

$$\cos\alpha' = 1 - 2\operatorname{sen}^2\frac{\alpha'}{2} = -1 - \frac{1}{2}\operatorname{sen}^2\alpha'$$

si nos alejamos del punto de intersección F'_{pd} del rayo con el eje en una magnitud $\Delta s'$ a lo largo del mismo eje, el camino óptico paraxial para pasar desde el objeto al punto de abscisa $s'_d + \Delta s'$ se incrementa una cantidad

$$d\varphi_1 = n' \Delta s' \left[1 - \frac{1}{2} \operatorname{sen}^2 \alpha'\right]$$

mientras que la luz que se propaga a lo largo del eje se incrementa en una cantidad

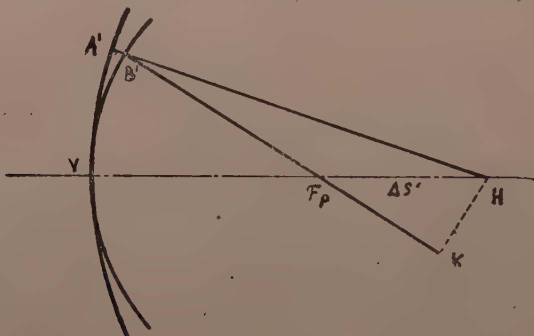
$$d\varphi_2 = n' \Delta s'$$

Resulta que para un desplazamiento $\Delta s'$ del punto imagen, la diferencia del camino óptico paraxial es:

$$d\varphi_1 - d\varphi_2 = -n' \frac{1}{2} \Delta s' \operatorname{sen}^2 \alpha' \qquad [5]$$

Con centro en F'_p y radio s' trazamos la circunferencia que nos representa la meridiana de la superficie de onda paraxial a la salida de la última superficie.

Con centro en el punto H alejado $\Delta s'$ de F_p y radio $s' + \Delta s'$ trazamos la circunferencia tangente en V a la onda luminosa. Trazamos desde B′ la normal B′H a la esfera de centro H. Sea A′ el punto de encuentro. VA′ tendría que ser la onda ideal sobre la cual todos los puntos vibrarían en fase cuando el punto H fuera la imagen:



Como la onda real es VB′, el segmento A′B′ es la aberración de onda W. Se tiene:

$$W = B'A' = -A'B' = -[A'H - B'H] = \sim -[A'H - B'K] = [A'H - B'F'_P - F'_P K]$$

$$\simeq -[s' + \Delta s' - s' - \Delta s' \cos \alpha'] = -\Delta s' [1 - \cos \alpha'] = -2\Delta s' \operatorname{sen}^2 \frac{\alpha'}{2}$$

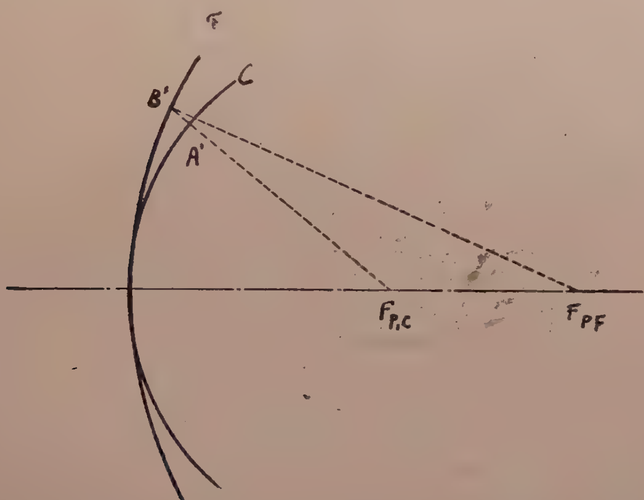
$$= -\frac{1}{2} \Delta s' \operatorname{sen}^2 \alpha'$$

La aberración de onda es, en el dominio paraxial:

$$W = \frac{d\varphi_1 - d\varphi_2}{n'}$$

Consideremos de nuevo el cromatismo. La luz paraxial relativa a la radiación C llega en fase al punto F'_{P_c}, imagen paraxial relativa a dicha radiación. La luz paraxial relativa a la radiación F llega en fase a la imagen paraxial relativa F'_{P_F} desplazada $\Delta s'$ respecto a la imagen F'_{P_c} conforme la relación:

$$\Delta s' = s'_F - s'_c$$



Si nos desplazamos una cantidad $-\Delta s' = -[s'_F - s'_c]$ del foco F'_{P_F}, caemos evidentemente sobre el foco F'_{P_c} y, por tanto, por la [5] la luz violeta llega en F'_P con una diferencia de camino óptico paraxial:

$$d\varphi_1 - d\varphi_2 = \frac{1}{2} n'_F \Delta s' \operatorname{sen}^2 \alpha'_F$$

Podemos, asimismo, decir que en F_{P_c} es:

$$C_{P_F} - C_{P_c} = \frac{1}{2} n'_F \Delta s' \operatorname{sen}^2 \alpha'_F$$

donde $\Delta s'$ es la aberración cromática paraxial.

Si consideramos las dos ondas luminosas esféricas, con centro en F_{P_c} y F_{P_F}, tangentes en el vértice, y si B' es un punto de la onda

relativa a la radiación F, trazando por B′ la normal $B'F_{P_c}$ a la onda C, el segmento de normal B′A′ comprendido entre las dos ondas es la aberración cromática de onda y su valor es:

$$W = B'A' = \frac{1}{2} \Delta s' \operatorname{sen}^2 \alpha'_F \qquad [6]$$

Si nos desplazamos ahora del foco F_{P_c} al foco óptimo $F_{z_c, F}$, que por hipótesis es común tanto a la radiación C como a la radiación F, las diferencias de los caminos ópticos relativas a las dos radiaciones, en el dominio paraxial, se incrementan respectivamente en:

$$- n'_F \frac{1}{2} F_{P_c} F_{z_{cF}} \operatorname{sen}^2 \alpha'_F$$

$$- n'_c \frac{1}{2} F_{P_c} F_{z_{cF}} \operatorname{sen}^2 \alpha'_c$$

y las respectivas aberraciones de onda se incrementan en:

$$- \frac{1}{2} F_{P_c} F_{z_{c,F}} \operatorname{sen}^2 \alpha'_F ; \qquad - \frac{1}{2} F_{P_c} F_{z_{c,F}} \operatorname{sen}^2 \alpha'_c$$

Como

$$\operatorname{sen}^2 \alpha'_F = \operatorname{sen}^2 \alpha'_c$$

los dos incrementos de onda son iguales, y por tanto podemos decir que también con referencia al foco óptimo, la diferencia de aberración de onda para las radiaciones C y F queda expresada por la [6].

Cuanto hemos dicho sirve limitándonos al campo paraxial. Por el contrario, cuando queremos considerar aperturas mayores, tendremos que poner, limitándonos al tercer orden y siempre refiriéndonos al foco óptimo:

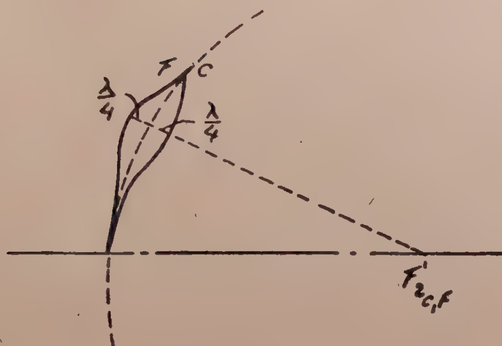
$$W = \frac{1}{2} \Delta s' \operatorname{sen}^2 \alpha' + A \operatorname{sen}^4 \alpha' \qquad [7]$$

y puesto que hemos dicho que, corregido el cromatismo longitudinal de manera que coincidan los focos óptimos de las dos radiaciones, la aberración cromática se anula al borde, tendremos que escribir:

$$\frac{1}{2} \Delta s' \operatorname{sen}^2 \alpha'_m + A \operatorname{sen}^4 \alpha'_m = 0$$

de donde:

$$\frac{1}{2}\Delta s' = -\text{ A sen}^2 \alpha'_m$$

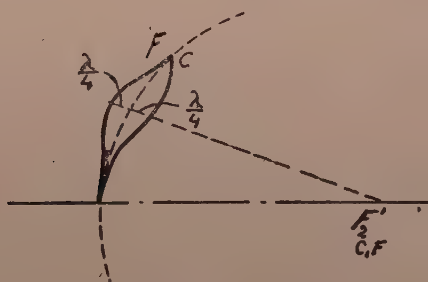


El máximo de la [7] se tiene por $\alpha = \alpha'_z$ dado por:

$$\frac{d\,W}{d\text{ sen }\alpha'} = \Delta s' \text{ sen } \alpha'_z + 4\text{ A sen}^3 \alpha'_z$$
$$= -2\text{ A sen}^2 \alpha'_m \cdot \text{sen } \alpha'_z + 4\text{ A sen}^3 \alpha'$$

de donde:

$$\text{sen } \alpha'_z = \frac{1}{\sqrt{2}} \text{ sen } \alpha'_m$$



es decir, precisamente en la zona para la cual se corrige el cromatismo, la aberración cromática es máxima.

El valor del máximo es:

$$W_{MX} = \frac{1}{4}\Delta s' \text{ sen}^2 \alpha'_m + \frac{A}{4}\text{ sen}^4 \alpha'_m$$
$$= \frac{1}{4}\Delta s' \text{ sen}^2 \alpha'_m - \frac{1}{8}\Delta s' \text{ sen}^2 \alpha'_m = \frac{1}{4}\cdot\frac{1}{2}\Delta s' \text{ sen}^2 \alpha'$$

Ahora es lícito suponer que la onda más luminosa está comprendida entre las dos ondas relativas a las radiaciones C y F y admitimos que el sistema no es perfecto en el momento que nos alejamos de esta onda luminosa una cantidad superior a $\frac{\lambda}{4}$ a un y otro lado de dicha onda.

Por consiguiente, nuestro sistema será perfecto cuando las dos ondas luminosas relativas a las radiaciones C y F, que se encuentran en bandas opuestas respecto a la onda más luminosa, distan de ella cada una $\frac{\lambda}{4}$ en los puntos donde la aberración es máxima. Esto nos lleva a la conclusión de que en la [8] tendremos que poner, con el fin de tener el sistema perfecto:

$$W_{MX} = \frac{1}{4} \cdot \frac{1}{2} \Delta s' \operatorname{sen}^2 \alpha'_m$$

de donde:

$$\Delta s' = \frac{4\lambda}{n' \operatorname{sen}^2 \alpha'_m}$$

Un sistema óptico puede, por tanto, desde el punto de vista del cromatismo, considerarse perfecto cuando, corregido el cromatismo longitudinal para una zona igual a $\frac{\lambda}{\sqrt{2}}$ de la máxima, el cromatismo paraxial no supere en valor absoluto

$$\frac{4\lambda}{n' \operatorname{sen}^2 \alpha'_m}$$

Es fácil demostrar que en la [6] el coeficiente A está dado por la relación:

$$A = \frac{a_F - a_c}{4}$$

donde a_F y a_c son los coeficientes de la aberración esférica

$$A \cdot E = a \operatorname{sen}^2 \alpha'$$

relativos a las radiaciones C y F respectivamente.

10 SOBRE LAS TOLERANCIAS EN LA ABERRACION DE ONDA DE LOS SISTEMAS OPTICOS, *por* CARLOS SÁNCHEZ DEL RÍO.

SUMMARY

According to a well-known limit due to Lord Rayleigh, an opticai system can be considered perfect if the wave aberration is not greater than $\lambda/4$, λ being the wave-length of the light employed. In this paper we start from the idea that an aberration is allowable when it is small enough as to make the dispersion circle, less than the diffraction pattern produced by the limitation of rays. The final result is that a general limit—like that of Rayleigh—cannot be established at once. The limit is different for differents apertures of the system. The limits for the third and fifth order zones are studied and a new general limit is proposed. But this limit refers to the derivative of the aberration with respect to the high of issue and not to the aberration itself.

Ocurre que—aun prescindiendo de las aberraciones puramente geométricas de los sistemas ópticos—es imposible conseguir una representación estigmática de un objeto por la misma naturaleza de la luz y de los sistemas ópticos (que forzosamente han de limitar los rayos). Esto conduce a pensar que es inútil tratar de corregir las aberraciones más allá de cierto límite y a establecer este límite o, para hablar con más corrección, un criterio sobre la cuantía de este límite.

El criterio generalmente admitido por los tratadistas de Optica, es el de Lord Rayleigh (*) que impone un límite a la aberración de onda, esto es, a la distancia l entre la superficie de onda y una superficie esférica con centro en el foco paraxial y tangente a la de onda en el eje; la distancia l se mide en la dirección del radio de la onda esférica. Según el criterio de Lod Rayleigh un sistema es perfecto siempre que el valor máximo de l no exceda un cuarto de la longitud de onda de la luz empleada.

Ahora bien, no es evidente, *a priori,* que una limitación en el máximo de la aberración de onda suponga un límite en el círculo de dispersión producido en el plano de formación de imagen. El hecho de que se obligue a la superficie de onda que sale de un sistema a mantenerse entre dos superficies esféricas cuyos radios

(*) LORD RAYLEIGH.—*Phil. Mag.* **8**, 263 (1879); *Coll. Pap.* **1**, 415 y 453.

difieren en cierta cantidad, no impone—mientras no se hagan hipótesis complemetarias sobre la superficie de onda—limitación de ningún género sobre la pendiente de la superficie de onda en cada punto, y es, precisamente, de esta pediente de la que depende el círculo de dispersión, ya que el rayo es siempre perpendicular a la superficie de onda. Esto no significa que no pueda ser válido en algunos casos un criterio del tipo del de Lord Rayleigh. Lo que quiere decir es que parece conveniente discutir los diferentes casos que puedan presentarse antes de fijar los criterios sobre las tolerancias en las aberraciones. Es lo que se intenta hacer en las páginas siguientes.

A lo largo de todo el trabajo se utilizarán sistemáticamente fórmulas deliberadamente simples, puesto que se trata de establecer criterios de validez cualitativa y cuantitativo-comparativa, pero no límites absolutamente rigurosos; esta clase de límites, por otra parte, dependerían, no sólo de las características particulares de cada caso concreto en una forma más pronunciada que los criterios que se establecen, sino también del receptor de radiaciones situado detrás del sistema óptico.

IDEAS FUNDAMENTALES

Un sistema óptico se considerará perfecto cuando los círculos de dispersión en la imagen, producidos por las aberraciones del sistema, sean iguales a las manchas de difracción que el mismo sistema origina por el hecho de estar diafragmado. Corrigiendo más las aberraciones (es decir, haciendo que la superficie de onda saliente del sistema se aproxime más a la forma esférica) no se consigue mejorar la calidad del sistema, porque con ello no se disminuye el tamaño de la figura de difracción.

Para establecer, por lo tanto, un criterio que indique la máxima aberración de onda compatible con un sistema óptico perfecto, se precisan las fórmulas que den el radio del círculo de dispersión por causa de la aberración y el radio de la mancha de difracción. Esto significa separar conceptualmente dos fenómenos que en la realidad se presentan como un hecho único: los sistemas ópticos de representación no son, ni pueden ser, nunca estigmáticos.

El radio del círculo de dispersión que se produce por la presencia de una onda aberrante, es el valor máximo de p, siendo p el ra-

dio del círculo que forman, al incidir sobre el plano focal, los rayos que provienen de la altura genérica h.

El cálculo de p en función h es muy sencillo. En la figura 1 OP representa la superficie de onda aberrante y OQ la superficie esférica de referencia, de radio k', tangente a OP en O y cuyo centro es el foco paraxial F. La distancia QP es la aberración de onda l (función de h). El rayo que pasa por P se obtiene, en virtud del teorema de Malus-Dupin, trazando la recta PP' normal a la superficie de onda en P. Esta recta corta al plano focal FF' en P';

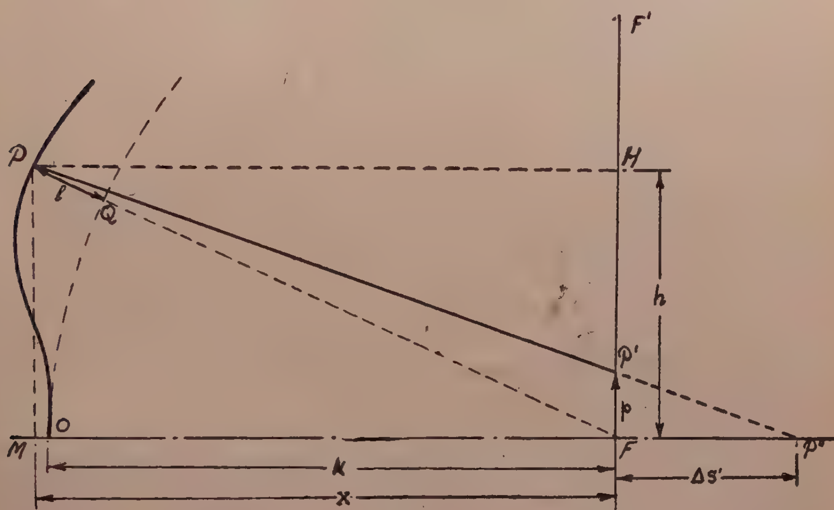


Figura 1

FP' es el radio p que investigamos. La misma recta corta al eje óptico OF en P''; FP'' es la aberración esférica longitudinal $\Delta s'$. Se ve en la figura que

$$FP' = FH + HP'$$

o bien

$$p = h + x \frac{dx}{dh} = \frac{1}{2} \frac{d}{dh} (h^2 + x^2)$$

siendo $h = FH$ y $x = FM$. Por otra parte, $\overline{FP}^2 = \overline{FH}^2 + \overline{FM}^2$ es decir, $(k' + l)^2 = h^2 + x^2$, con lo cual de la fórmula anterior se deduce:

$$p = (k' + l) \frac{dl}{dh}$$

En la práctica, es siempre l despreciable frente a k' (en el caso presente, en particular, el punto O es, según se verá, el centro de la pupila de salida del sistema óptico y $k = \mathrm{OF}$ es una cantidad bastante grande) y se puede escribir:

$$p = k' \frac{dl}{dh} \qquad [1]$$

que es la fórmula que da p en función de h siempre que se conozca la relación $l = l(h)$. Como, generalmente, se mide la aberración por su magnitud longitudinal $\Delta s'$ conviene dar una fórmula para pasar de esta aberración longitudinal $\Delta s'$ a la aberración de onda l. Dentro de la aproximación admitida se verifica la proporción (fig. 1):

$$\frac{p}{h} = \frac{\Delta s'}{k'}$$

de la cual y [1] se deduce:

$$\Delta s' = \frac{k'^2}{h} \cdot \frac{dl}{dh}$$

o bien

$$l = \frac{1}{k^2} \int_0^h \Delta s' \cdot h \cdot dh \qquad [2]$$

La mancha de difracción que se produce cuando la luz atraviesa un diafragma circular de radio H, está constituída por un disco luminoso central rodeado de anillos alternativamente claros y obscuros. El ángulo (en radianes) que subtiende desde el centro del diafragma el primer anillo obscuro es (*):

$$1{,}220 \frac{\lambda}{2\,\mathrm{H}}$$

siendo λ la longitud de onda de la luz empleada. Para el primer anillo claro hay que sustituir la constante 1,220 por 1,638; para el siguiente obscuro por 2,233 ..., etc. Estos valores han sido establecidos en el caso de difracción de Fraunhofer (ondas planas), por lo que no responden rigurosamente al problema presente. Sin embargo, como lo que tratamos de establecer es un criterio para eva-

(*) E. V. Lommel.—*Abh. Bayer. Akad. d. Wiss.* **15**, 531 (1886).

luar el radio de la mancha de difracción se puede (teniendo en cuenta que las intensidades del círculo central y los diversos anillos están en la relación 1 : 0,084 : 0,033 ..., etc.) tomar como ángulo subtendido por el radio de la mancha el valor λ/H en la seguridad de que más del 90 % de la luz está dentro de este ángulo y el resto repartida por todo el espacio. Este ángulo corresponde a un radio de la mancha en el plano focal FF′ igual a

$$\rho = \frac{\lambda}{H} k'$$

si suponemos que el diafragma tiene su centro en O (fig. 1). En estas condiciones, el radio del diafragma es el valor máximo de h que hay que utilizar en el problema de que se trate.

EL PROBLEMA GENERAL

La relación $\Delta s' = f(h)$, existente entre la altura de salida de un rayo y la aberración longitudinal, no es, en general, representable por medio de funciones elementales. Se suele, por eso, expresar esta relación por una serie de potencias de h

$$\Delta s' = ah^2 + bh^4 + ch^6 + \ldots$$

(sólo se presentan potencias pares dada la simetría en torno al eje óptico de los problemas de que se trata ahora). De esta serie se toman, en la resolución del problema práctico, más o menos términos, según sea la altura total H del sistema. En cada caso concreto, por lo tanto, la aberración viene determinada por un cierto número de parámetros a, b, c, ..., etc., que son las constantes del polinomio que expresa la función $\Delta s' = f(h)$. Evidentemente, la aberración de onda—que se obtiene mediante la fórmula [2]—queda también determinada por los mismos parámetros.

Lo que se pretende, en el presente trabajo, es dar un límite al valor máximo L de la aberración de onda, de manera que siempre que L sea inferior a ese límite, se pueda asegurar que el círculo de dispersión es menor que la mancha de difracción. Para poder hacer la aserción anterior con toda generalidad, es necesario escoger los parámetros a, b, ..., etc., de manera que representen el caso más desfavorable posible. Esto es, el caso en que—para un cierto

valor de L—sea máximo el radio del círculo de dispersión. Una discusión de cada caso concreto permite determinar—en función de L, H y k'—los valores de los parámetros a, b, c, ..., etc., que se ajustan a esta situación. Lo interesante es—y esto se ve en los apartados siguientes—que, en estas condiciones, el radio del círculo de dispersión viene dado por

$$P = C \frac{k' L}{H}$$

siendo C una constante numérica. Basta ahora igualar esta fórmula con [3] para obtener el valor límite para L, que es

$$\frac{\lambda}{C}$$

Este hecho de que C sea un número es lo que aconseja establecer el criterio de perfección de un sistema óptico por medio de una limitación en la aberración de onda, porque sólo de este modo se consigue que el criterio no dependa de las características concretas de cada aparato.

En los párrafos siguientes se determina el valor C para los casos más sencillos.

LA ZONA DE TERCER ORDEN

Un sistema óptico puede estudiarse con los elementos de la zona de tercer orden, siempre que la aberración pueda expresarse en la forma

$$\Delta s' = a h^2 \qquad [4]$$

siendo a una constante.

De [1] y [2] se deduce que en esta zona la aberración de onda viene dada por

$$l = \frac{a}{4 k'^2} h^4 \qquad [5]$$

De aquí resulta que—dado que l aumenta con h—el valor máximo que puede alcanzar l se obtiene para el borde $h = H$. Es decir, si llamamos L al valor l máximo

$$L = \frac{a}{4 k'^2} H^4$$

Despejando a de esta fórmula e introduciéndola en [5] se deduce

$$l = \frac{L}{H^4} h^4 \qquad [6]$$

Introduciendo [6] en [1]

$$p = \frac{4\,k'\,L}{H^4} h^3$$

que toma el mayor valor posible (dentro de las alturas permitidas por el diafragma) para $h = H$. Este valor máximo P vale

$$P = \frac{4\,k'\,L}{H} \qquad [7]$$

Este P es el radio del círculo de dispersión producido por la aberración; cualquier rayo que pase por el diafragma corta al plano focal en un punto que dista del eje menos de P.

Para que, a pesar de existir aberración, el sistema pueda ser considerado perfecto, es necesario que P sea menor, o por lo menos igual, al radio de la mancha de difracción dado por [3]; es decir,

$$\frac{4\,k'\,L}{H} \leqslant \frac{\lambda}{H} k'$$

De donde

$$L \leqslant \frac{\lambda}{4} \qquad [8]$$

Un sistema que pueda estudiarse dentro de la zona de tercer orden tiene la máxima perfección posible si la aberración de onda no sobrepasa un cuarto de la longitud de onda de la luz empleada. Como se ve, en la zona de tercer orden, resulta válido el clásico criterio de Lord Rayleigh.

LA ZONA DE QUINTO ORDEN

En los sistemas ópticos para cuyo estudio hace falta considerar en el desarrollo de la aberración esférica, términos hasta la quinta potencia inclusive, puede expresarse $\Delta s'$ así:

$$\Delta s' = ah^2 + bh^4 \qquad [9]$$

siendo a y b dos constantes.

Ahora es necesario distinguir dos casos totalmente diferentes:

1.° a y b tienen el mismo signo. El sistema presenta sobre o subcorrección pura (según sean positivos o negativos, respectivamente).

2.° a y b tienen distinto signo. El sistema puede presentar simultáneamente sobre y subcorrección; la ecuación [9] tiene un máximo o mínimo real.

Estudiaremos ambos casos separadamente.

En el primer caso, supóngase, por ejemplo, que a y b son positivos (si fueran negativos los resultados son los mismos). Entonces de [9] y [2] se deduce que la aberración de onda es ($a>0$, $b>0$)

$$l = \frac{1}{k'^2}\left(\frac{a}{4}h^4 + \frac{b}{6}h^6\right) \qquad [10]$$

creciente con h. El valor más grande lo alcanza para el borde $h = \mathrm{H}$.

$$\mathrm{L} = \frac{1}{k'^2}\left(\frac{a}{4}\mathrm{H}^4 + \frac{b}{6}\mathrm{H}^6\right)$$

De aquí puede deducirse b en función de L y de a introduciéndolo en [10], Derivada la ecuación resultante respecto de h y sustituído este valor en [1], se obtiene:

$$p = \frac{1}{k'}\left(ah^3 - \frac{3\,a}{2\,\mathrm{H}^2}h^5 + \frac{6\,\mathrm{L}\,k'^2}{\mathrm{H}^6}h^5\right)$$

que presenta un valor máximo para $h = \mathrm{H}$. Este valor máximo debe ser para un sistema óptico perfecto $\leqslant \rho$. De aquí resulta la condición

$$\mathrm{L} \leqslant \frac{\lambda}{6} + \frac{\mathrm{H}^4\,a^2}{12\,k'^2}$$

El caso peor (caso en que se exige de L un valor menor) es el que se presenta cuando $a=0$. Esto es, por otra parte, intuitivo fijándose en el dibujo convencional de la figura 2. Se ve que la máxima inclinación de la normal a la superficie de onda, se obtiene cuando ésta tiene un contacto «mayor» con la superficie esférica de referencia OA; éste es el caso más desfavorable. Por lo tanto, puede afirmarse que un sistema óptico para el cual los dos coeficientes de aberración (de los términos de segundo y cuarto grado) son

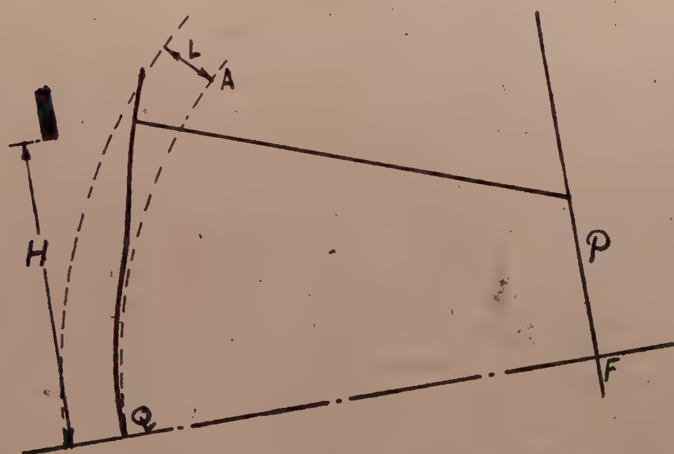


Figura 2

del mismo signo, es perfecto siempre que la aberración de onda máxima sea igual o inferior a un sexto de la longitud de onda de la luz empleada.

$$L \leqslant \frac{\lambda}{6} \qquad [11]$$

Sea, ahora, el segundo caso: a y b tienen distinto signo. Se expresa esto si $a>0$, $b>0$, poniendo la aberración de onda (fórmula [10]) en la forma

$$l = \frac{1}{k'^2}\left(\frac{a}{4}h^4 - \frac{b}{6}h^6\right) \qquad [12]$$

En el caso presente a y b se pueden determinar por las dos condiciones siguientes:

1) En el borde ($h = \mathrm{H}$) es $l = 0$

$$0 = \frac{1}{k'^2}\left(\frac{a}{4}\mathrm{H}^4 - \frac{b}{6}\mathrm{H}^6\right) \qquad [13]$$

2) El valor máximo de la aberración de onda es L. El máximo se obtiene para una altura tal que (fig. 3)

$$\frac{dl}{dh} = \frac{1}{k'}(ah^3 - bh^5) = 0$$

es decir, para

$$h = \sqrt{\frac{a}{b}}$$

Por lo tanto,

$$\mathrm{L} = \frac{1}{k'^2}\left(\frac{a}{4}\,\frac{a^2}{b^2} - \frac{b}{6}\,\frac{a^3}{b^3}\right) \qquad [14]$$

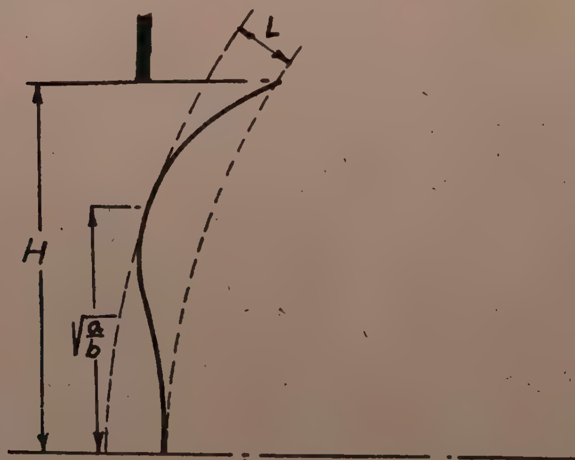


Figura 3

De [13] y [14] se deduce

$$a = \frac{27\,\mathrm{L}\,k'^2}{\mathrm{H}^4} \qquad b = \frac{81\,\mathrm{L}\,k'^2}{2\,\mathrm{H}^6}$$

Introduciendo estos valores en [12], y teniendo en cuenta [1], se tiene

$$p = \frac{27\,\mathrm{L}\,k'}{\mathrm{H}^4}h^3 - \frac{81\,\mathrm{L}\,k'}{2\,\mathrm{H}^6}h^5 \qquad [15]$$

El valor máximo de p (radio del círculo de dispersión por aberración) resulta para una altura dada por la ecuación

$$\frac{dp}{dh} = \frac{3^4 \, L \, k'}{H^4} h^2 - \frac{5 \cdot 3^4 \, L \, k'}{2 \, H^6} h^4 = 0$$

que admite las soluciones:

$$h_0 = 0 \qquad h_1 = H \sqrt{\frac{2}{5}}$$

Puesto el valor h_1 en [15], resulta un valor máximo de p

$$P = -54 \left(\frac{2}{5}\right)^{3/2} \frac{L \, k'}{H} \simeq -13{,}5 \frac{L \, k'}{H} \qquad [16]$$

De esta ecuación [3] resulta la condición para que en el caso presente el sistema pueda considerarse perfecto. La aberración de onda no debe sobrepasar el valor que se obtiene dividiendo la longitud de onda de la luz por 13,5

$$L \leqslant \frac{\lambda}{13{,}5} \qquad [17]$$

Como se ve, en los sistemas ópticos que se estudian, incluyendo en el desarrollo en serie de la aberración, términos hasta de quinto grado, los criterios [11] y [17] para que los sistemas sean perfectos, son más restrictivos que el de Lord Rayleigh.

LA ZONA DE SEPTIMO ORDEN

Los mismos razonamientos que hasta ahora, pueden repetirse en el caso de que el sistema óptico tenga una apertura tal que su estudio requiera expresar la aberración longitudinal en la forma:

$$\Delta s' = ah^2 + bh^4 + ch^6 \qquad [18]$$

Cabe ahora distinguir cuatro casos:

1.° a, b y c tienen el mismo signo. Se presenta sub- o sobrecorrección pura.

2.° a tiene un signo y b y c otro. Puede haber sub- y sobrecorrección simultáneamente. La ecuación [18] puede tener un máximo o mínimo real.

3.° *a* y *b* tienen un signo y *c* otro. Puede haber sub y sobrecorrección simultáneamente. La ecuación [18] puede tener un máximo o mínimo real.

4.° *a* y *c* tienen un signo y *b* otro. Puede haber sub y sobrecorrección simultáneamente. La ecuación [18] puede tener un máximo y un mínimo reales.

El tratamiento teórico de estos casos se puede realizar de manera análoga a como se ha hecho anteriormente. En el primer caso, por ejemplo, se presentan las condiciones más desfavorables cuando $a = b = 0$, y entonces, por el mismo procedimiento empleado en la zona de tercer orden, y en el primer caso de la de quinto, resulta la condición:

$$L < \frac{\lambda}{8} \qquad [19]$$

Relación más restrictiva que las equivalentes [8] y [11]. Análogamente, los casos segundo y tercero se pueden estudiar como el segundo de la zona de tercer orden. En el cuarto caso se determinan *a*, *b* y *c* por medio de un sistema de tres ecuaciones con tres incógnitas, que resulta al imponer que en el borde la aberración de onda sea L, que el máximo de ella sea L y que el mínimo sea nulo. Aquí no se exponen con detalle estos casos porque su estudio no ofrece nada nuevo, como no sea una mayor complejidad algébrica.

CONCLUSION

Como resultado final de las discusiones anteriores, se pueden establecer dos afirmaciones:

1.° Por la misma naturaleza de la luz, existe un límite de corrección de las aberraciones geométricas de los sistemas ópticos, que es inútil sobrepasar, porque no se logra con ello mejora ninguna de las cualidades ópticas del sistema.

2.° No es posible dar un criterio con carácter general, que indique el valor máximo que puede tomar la aberración de onda para que el sistema sea ya inmejorable. Se obtiene un criterio diferente según las características del sistema de que se trate.

En estas condiciones conviene establecer un criterio de perfección de los sistemas ópticos que, si bien dependa de ciertas características de ellos, lo haga a través de magnitudes más fácilmente

medibles que los coeficientes de los polinomios que expresan las aberraciones en función de la altura. Tal criterio puede establecerse—para la aberración de onda—suponiendo que el sistema es perfecto siempre que el valor máximo de [1] sea menor o igual que [3], lo que da

$$\left(\frac{dl}{dh}\right)_{max} \leqslant \frac{\lambda}{H} \qquad [20]$$

Este criterio sólo exige introducir una característica del sistema que se estudia: el radio H de la pupila de salida. Esta es la ventaja de expresar el criterio en función de la aberración de onda. Para la aberración longitudinal, en lugar de [20] se escribiría

$$(\Delta s')_{max} \leqslant \frac{\lambda\, k'^2}{H\, h_m}$$

pero esta forma tiene el inconveniente de que es necesario conocer también k' (distancia de la pupila de salida al plano focal) y h_m (altura en la pupila de salida, para la que la aberración longitudinal tiene el valor máximo).

Por lo que se refiere al valor práctico de estos criterios de perfección teórica, surge inevitablemente la pregunta: ¿Necesitan en la realidad los sistemas ópticos ser teóricamente perfectos? Esta pregunta no puede contestarse con toda generalidad, aunque es posible afirmar que, en la mayoría de los casos, esta perfección teórica no es necesaria. Pero la respuesta precisa se obtiene consultando al aparato de registro (ojo, placa fotográfica, etc.) que va detrás de todo sistema óptico.

Finalmente, sólo me resta agradecer las observaciones del profesor Durán y su interés por el desarrollo de este trabajo.

Instituto de Optica «Daza de Valdés».

11. LA FORMULA DE LIEBMANN COMO COMPLEMENTO A LA DETERMINACION OPTICA DE TENSIONES, *por* L. VILLENA PARDO.

SUMMARY

A very current fact in Physics is the need to find an harmonic function, the values of which are known at the limits and from which depend the solution of the studied problem.

Liebmann proposed an equation in differences which substitutes approximately the differential equation of Laplace. Different kinds of practical methods have been proposed for the application of the formulæ to any type of boundaries.

In our photoelastic works we have frequently employed this formulæ and, basing ourselves on the different previous studies, we have arrived at a practical, convenient and quick method with the sufficient accurateness for the problems in question.

Two generalizations are given of Liebmann's original formulæ for irregular boundaries and for the inclusion of a greater number of points and rules are fixed for the assignation of initial values and for the advance to finer nets.

Besides, a summary of the relaxation and key values methods are given.

1. INTRODUCCIÓN

Raro es el capítulo de la Física en que no intervengan funciones potenciales armónicas, de las que depende la solución de numerosas cuestiones.

El problema que generalmente se plantea es el de Dirichlet, esto es, determina una función, f, que satisface determinadas condiciones en los límites, impuestas por la realidad física del problema, y cumple, en todo punto del recinto donde está definida, la ecuación de Laplace

$$\nabla^2 f = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = 0 \qquad [1]$$

de cuya solución depende, pues, el problema en cuestión.

Algunas veces es posible combinar funciones armónicas sencillas hasta conseguir una función que cumpla las condiciones impuestas en los límites y que satisfaga a la ecuación [1]. Pero en gran número de casos la búsqueda de esta función resulta laboriosísima e inabordable, con lo que el problema no puede ser resuelto desde el punto de vista numérico.

Obsérvese, por otra parte, que los valores de contorno, de los cuales depende cualitativamente la solución, vendrán, en general,

afectados por errores de observación que, necesariamente, restringirán la exactitud de la solución, cualquiera que sea el procedimiento seguido para hallarla. Resulta así que en los datos mismos del problema va implícita una inexactitud que, a veces, pudiera ser mayor de la que introduzcan métodos no exactos en el tratamiento de la ecuación diferencial [1]. Además, basta, en general, conocer los valores que f toma en determinados puntos o regiones.

Por tanto, la función f queda determinada (pero no definida) si se conoce, con cierta tolerancia de error, su valor en ciertos puntos distribuídos en una red de polígonos regulares, y en número suficientemente grande para que se pueda hallar fácilmente el valor que tomaría f en otro cualquiera. Utilizando entonces el cálculo de diferencias finitas (1) se pueden hallar derivadas e integrales de la función así determinada, con lo que el problema queda prácticamente resuelto.

En el caso particular de problemas elásticos en dos dimensiones, la función a determinar es la función de tensión o de Airy que es biarmónica, es decir, que debe satisfacer la ecuación

$$\nabla^4 F = \frac{\partial^4 F}{\partial x^4} + 2\frac{\partial^4 F}{\partial x^2 \partial y^2} + \frac{\partial^4 F}{\partial y^4} = 0$$

de la cual se deducen las tensiones principales por

$$\sigma_x = \frac{\partial^2 F}{\partial y^2}$$

$$\sigma_y = \frac{\partial^2 F}{\partial x^2}$$

$$\tau_{xy} = -\frac{\partial^2 F}{\partial x \partial y}$$

Las condiciones en los límites para F son

$$\frac{\partial F}{\partial y} = c_1 + \int_0^y \Xi \, d\, l$$

$$\frac{\partial F}{\partial x} = c_2 - \int_0^x H \, d\, l$$

siendo Ξ y H las componentes según x, y de las fuerzas aplicadas en el contorno.

La función de Airy puede ser determinada en pocos casos y siempre resulta complicada a consecuencia de sus condiciones en los límites y de su biarmonicidad.

Cuando se utiliza el procedimiento fotoelástico para la determinación de tensiones, el problema se reduce notablemente. La investigación óptica de los modelos permite conocer en todo punto la diferencia de tensiones principales $t = \sigma_1 - \sigma_2$, siendo preciso, para determinar el valor de éstos, hallar el valor de la suma $s = \sigma_1 + \sigma_2$.

Sustituyendo los valores de σ_1 y σ_2 en función de F se tiene

$$s = \frac{\partial^2 F}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 F}{\partial y^2} = \nabla^2 F$$

es decir, que s cumple la ecuación de Laplace

$$\nabla^2 s = \frac{\partial^2 s}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 s}{\partial y^2} = 0$$

Los valores que s toma en los límites se conocen directamente del análisis fotoelástico, ya que en los contornos una de las tensiones es nula, en general, y coinciden t y s. En los puntos de aplicación de fuerzas no subsiste esta coincidencia, pero puede calcularse fácilmente el valor de s (2).

Llegamos así a la conclusión de que el método fotoelástico queda supeditado a resolver la ecuación

$$\nabla^2 s = \frac{\partial^2 s}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 s}{\partial y^2} = 0$$

siendo conocidos los valores que s toma en los contornos del modelo en estudio, solución abordable teóricamente, pero que, para que el método resulte práctico, debe obtenerse de una manera cómoda y rápida. La solución de esta ecuación se ha abordado por diversos caminos, utilizando familias de líneas, midiendo deformaciones de espesor, recurriendo a analogías mecánicas o eléctricas, utilizando interferómetros, etc., según puede verse en (2). Pero uno de los métodos más eficaces es el debido a Liebmann, que se describe a continuación.

2. La fórmula de Liebmann

En 1918 propuso H. Liebmann (3) un método para la solución numérica aproximada de la ecuación [1] que consiste en sustituir las diferenciales por incrementos y las derivadas por cocientes incrementales (*). El conjunto infinito de puntos del dominio en estudio queda, además, sustituído por un número finito de puntos uniformemente distribuídos en el citado dominio.

Siguiendo este criterio, las derivadas primeras vendrán dadas por

$$\frac{\partial f}{\partial x} \simeq \frac{f(x + \Delta x, y) - f(x, y)}{\Delta x}$$

$$\frac{\partial f}{\partial y} \simeq \frac{f(x, y + \Delta y) - f(x, y)}{\Delta y}$$

o, si hacemos $\Delta x = \Delta y = h$

$$\frac{\partial f}{\partial x} \simeq \frac{f(x + h, y) - f(x, y)}{h}$$

$$\frac{\partial f}{\partial y} \simeq \frac{f(x, y + h) - f(x, y)}{h}$$

y las derivadas segundas, por

$$\left(\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}\right)_{x,y} \simeq \frac{f(x + h, y) + f(x - h, y) - 2 f(x, y)}{h^2}$$

$$\left(\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}\right)_{x,y} \simeq \frac{f(x, y + h) + f(x, y - h) - 2 f(x, y)}{h^2}$$

de tal manera que la laplaciana valdrá

$$\left(\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}\right)_{x,y} \simeq \frac{f(x+h, y) + f(x-h, y) + f(x, y+h) + f(x, y-h) - 4 f(x, y)}{h^2}$$

ecuaciones todas ellas en que figuran diferencias finitas, en lugar de diferenciales, por cuyo motivo se las suele conocer por «ecuaciones diferencia».

(*) Adviértase, a este respecto, que en Física se manejan siempre incrementos capaces de ser medidos; las diferenciales son, pues, entes matemáticos ideales.

Cuando la función f debe cumplir la condición [1] la anterior expresión será igual a cero, es decir, se cumple que

$$f(x, y) \simeq \frac{1}{4}\left[f(x+h, y) + f(x-h, y) + f(x, y+h) + f(x, y-h)\right] \quad [2]$$

relación conocida por ecuación de Liebmann, que permite hallar el valor que toma una función armónica en un punto, como media aritmética de los cuatro valores que corresponden a los cuatro puntos situados en cruz alrededor de aquél.

Si tenemos un recinto rectangular en el cual está definida una función armónica f, de la que conocemos los valores en los contornos, podemos, por medio de la aplicación repetida de la expresión [2], hallar los valores aproximados de f en una serie de puntos del interior del recinto.

En efecto, si colocamos sobre él una red de puntos, de tal manera que las líneas extremas coincidan con los contornos y escribimos la ecuación para cada uno de los interiores, obtendremos tantas ecuaciones como incógnitas, es decir, como puntos interiores tiene la red. En tales ecuaciones figurarán como constantes los valores conocidos que f toma en los puntos en que la red encuentre a los contornos.

Así queda sustituída la ecuación diferencial [1] por un sistema de ecuaciones lineales con igual número de incógnitas. Sin embargo, la resolución directa, por ejemplo mediante determinantes, de este sistema de ecuaciones, resulta muy difícil a causa del elevado número de incógnitas y es prácticamente inabordable.

Liebmann (3) propuso un procedimiento de tanteo para resolver este sistema de ecuaciones, que permite hallar el valor de f en los puntos interiores. Una breve discusión y una demostración de la convergencia puede verse en (4).

Se comienza recubriendo el modelo con una red de puntos, como anteriormente hemos indicado, es decir, se sustituye el contorno de puntos x, y por un número discreto, $x = mh$, $y = nh$; se determinan los valores de f en los puntos en que esta red corta los contornos, con la exactitud que permiten los datos o inferior, si fuera suficiente para nuestro propósito; se asignan a todos los puntos del interior valores arbitrarios, con una cifra significativa más, para lo cual, se tiene en cuenta cualquier experiencia anterior,

o sencillamente se interpola a *groso* modo entre los valores de los contornos (*).

La ecuación [2] aplicada a un punto del interior de esta red. conduce (fig. 1) a la fórmula de Liebmann

$$f_0 = \frac{1}{4}[f_1 + f_2 + f_3 + f_4] \qquad [3]$$

También se puede aplicar en sentido diagonal, obteniéndose entonces

$$f_0 = \frac{1}{4}[f_5 + f_6 + f_7 + f_8] \qquad [4]$$

aún cuando de ordinario se emplea [3].

Eligiendo sobre la red de puntos interiores un orden arbitrario,

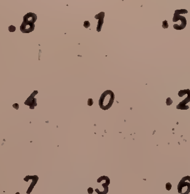


Figura 1

que se mantendrá constante durante todo el proceso de aproximación, se reemplaza cada valor de f por el promedio de los cuatro adyacentes, utilizando la fórmula [3] y empleando los valores ya corregidos de los puntos anteriormente tratados. El resultado de esta operación es una nueva serie de valores en todos los puntos interiores, que se aproxima más a los de solución verdadera. Se efectúa entonces una segunda corrección que nos proporciona una aproximación mejor y luego otras sucesivas hasta que los errores obtenidos en la última corrección afecten sólo a la última cifra significativa. Desechando ésta, obtenemos una serie de valores de f que satisfacen a la ecuación diferencia [2] y, aproximadamente, a la ecuación diferencial [1].

Sea, por ejemplo, el rectángulo de la figura 2, en el cual la función F satisface la ecuación de Laplace y, por tanto, verifica aproximadamente la ecuación de Liebmann. Se ha dibujado una cuadrícula de tal modo que los contornos formen parte de ella, se

(*) Cualquier valor que se asigne a los puntos interiores conducirá a resultados correctos, aunque, naturalmente, exigiendo más tiempo de trabajo. En el § 4 volveremos de nuevo sobre este tema.

han determinado los valores en los contornos, escribiéndolos en los puntos correspondientes. A cada uno de los puntos interiores O, P, ... Z, se les ha asignado un valor arbitrario de f con una cifra más, que está escrito a la cabeza de cada columna.

La fórmula [3] aplicada a todos los puntos interiores proporciona doce ecuaciones lineales cuya resolución sería algo complicada,

	A . 9	B . 8	C . 8	D . 9	
N . 12	O . 10,0 10,5 10,5 10,4	P . 9,0 9,5 9,6 9,5	Q . 9,0 9,6 9,6 9,5	R . 10,0 10,6 10,4 10,4	E . 12
M . 14	S . 12,0 11,4 11,2 11,2	T . 11,0 10,2 10,1 10,1	U . 11,0 10,2 10,1 10,1	V . 12,0 11,2 11,2 11,2	F . 14
L . 12	W . 10,0 10,3 10,4 10,4	X . 9,0 9,4 9,5 9,5	Y . 9,0 9,4 9,5 9,5	Z . 10,0 10,4 10,4 10,4	G . 12
	K . 9	J . 8	I . 8	H . 9	

Figura 2

a pesar del reducido número de puntos internos que en este caso existen.

Aplicando el procedimiento de Liebmann en el orden O, P, ... Z se ha efectuado una primera corrección

$$f'_O = \frac{1}{4}[f_N + f_A + f_P + f_S] = \frac{1}{4}[12 + 9 + 9 + 12] = 10{,}5$$

$$f'_P = \frac{1}{4}[f'_O + f_G + f_Q + f_T] = \frac{1}{4}[10{,}5 + 8 + 9 + 11] = 9{,}5$$

....

....

$$f'_Z = \frac{1}{4}[f'_Y + f'_V + f_G + f_H] = \frac{1}{4}[9{,}4 + 11{,}2 + 12 + 9] = 10{,}4$$

cuyos resultados están anotados bajo los primitivos. Partiendo de estos valores se han obtenido, en una segunda pasada, los números que ocupan el tercer lugar de cada columna. Así se ha continuado hasta que los valores de *f* se han reproducido. Estos valores satisfacen evidentemente a la ecuación [2] y cumplen aproximadamente la condición [1]. La función queda, pues, aproximadamente determinada en una serie de puntos discretos.

Obsérvese que el rectángulo estudiado tiene dos ejes de simetría, por cuya razón puede reducirse notablemente el trabajo de corrección. Siguiendo el proceso de la figura 3 se llega a unos re-

A • 9   B • 8

N • 12   O • 10.0   P • 9.0
10,5   9,8
10.6   9.7
10.5   9,6
10.5   9,6

M • 14   S • 12,0   T • 11,0
11,5   10,4
11.4   10.3
11,3   10.2
11.3   10.2

Figura 3

sultados prácticamente iguales con sólo 16 operaciones, en lugar de las 48 realizadas en la figura 2.

En el eje vertical, situado entre dos líneas de puntos, se reflejan los valores de tal manera que al corregir el punto P queda

también corregido el punto Q, etc. Además, para puntos vecinos al eje como el P tenemos

$$f'_P = \frac{1}{4}[f'_O + f_B + f_Q + f_T] = \frac{1}{4}[f'_O + f_B + f'_P + f_T]$$

de donde

$$f'_P = \frac{1}{3}[f'_O + f_B + f_T]$$

En el eje horizontal, que contiene una línea de puntos, también se reflejan los valores de tal manera que al corregir P queda también corregida X, etc. Para puntos del eje como el S tenemos

$$f'_S = \frac{1}{4}[f_M + f'_O + f_T + f_W] = \frac{1}{4}[f_M + 2f'_O + f_T]$$

Si en lugar de utilizar la fórmula [3] recurriéramos a la [4], obtendríamos, evidentemente,

$$f'_B = \frac{1}{2}[f_N + f'_P]$$

Finalmente, para puntos como el T, que gozan de las dos simetrías, se tiene

$$f'_T = \frac{1}{3}[f'_S + 2f'_P]$$

ó

$$f'_T = \frac{1}{2}[f'_O + f'_P]$$

según se recurra a la fórmula normal o diagonal.

3. Generalización de la fórmula de Liebmann

El procedimiento de Liebmann así expuesto sólo sirve para recintos rectangulares y en aquellos casos en que se pretende obtener resultados poco exactos.

En el caso general de contornos irregulares no es posible trazar una red de puntos que comprendan los contornos. Es, pues, nece-

sario hallar la fórmula general para el caso en que los cuatro puntos circundantes estén a distancias distintas (fig. 4). Entonces, en lugar de los cocientes incrementales del § 2 tendremos

$$\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)_{AO} \simeq \frac{f_A - f_O}{a} \qquad \left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)_{OC} \simeq \frac{f_C - f_O}{c}$$

$$\left(\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}\right)_O = \frac{1}{a+c}\left[\frac{f_A - f_O}{a} + \frac{f_C - f_O}{c}\right] = \frac{f_A}{a(a+c)} + \frac{f_C}{c(a+c)} - \frac{f_O}{ac}$$

y análogamente

$$\left(\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}\right)_O = \frac{f_B}{b(b+d)} + \frac{f_D}{d(b+d)} - \frac{f_O}{bd}$$

de donde obtenemos la forma generalizada

$$f_O = \frac{abcd}{ac+bd}\left[\frac{f_A}{a(a+c)} + \frac{f_B}{b(b+d)} + \frac{f_C}{c(a+c)} + \frac{f_D}{d(b+d)}\right] =$$

$$= K_a f_A + K_b f_B + K_c f_C + K_d f_D \qquad [5]$$

siendo a, b, c y d las distancias de los puntos A, B, C y D, al O, en el que se quiere hallar el valor de f. Los coeficientes K pueden

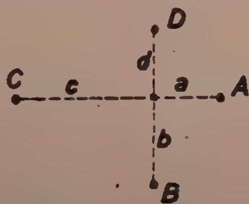


Figura 4

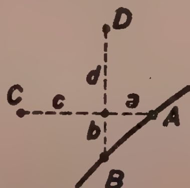


Figura 5

calcularse independientemente y sirven para todas las pasadas sucesivas.

Un caso interesante es aquel en que $c=d$, que se presenta mucho cerca de los contornos (fig. 5). Entonces, si llamamos h a esta distancia común, que será la constante de la red de puntos, y ponemos $a=\alpha h$, $b=\beta h$, tendremos

$$f_O = \frac{\alpha\beta}{\alpha+\beta}\left[\frac{1}{\alpha(1+\alpha)} f_A + \frac{1}{\beta(1+\beta)} f_B + \frac{1}{1+\alpha} f_C + \frac{1}{1+\beta} f_D\right] =$$

$$= k_a f_A + k_b f_B + k_c f_C + k_d f_D \qquad [6]$$

en que los coeficientes k se calculan también una sola vez y sirven para sucesivas correcciones.

También puede presentarse el caso en que $a=c=h$ y $b=\beta h$, $d=\delta h$ (fig. 6), verificándose, entonces

$$f_0 = \frac{\beta\delta}{1+\beta\delta}\left[\frac{f_A}{2} + \frac{f_B}{\beta(\beta+\delta)} + \frac{f_C}{2} + \frac{f_D}{\delta(\beta+\delta)}\right] \qquad [7]$$

Si, además, la línea AOC es un eje de simetría, tenemos

$$f_0 = \frac{\beta\delta}{1+\beta\delta}\left[f_A + \frac{f_B}{\beta(\beta+\delta)} + \frac{f_D}{\delta(\beta+\delta)}\right]$$

Otro caso particular interesante tiene lugar cuando $b=c=d$, que también se presenta en los contornos (fig. 7), llamando h a la distancia común y poniendo $a=\alpha h$, tendremos

$$f_0 = \frac{f_A + \alpha f_C}{(1+\alpha)^2} + \frac{\alpha(f_B + f_D)}{2(1+\alpha)} \qquad [9]$$

Finalmente, si hacemos $a=b=c=d=h$, volvemos a obtener la forma [3].

La aplicación en cada caso de estas fórmulas permite resolver

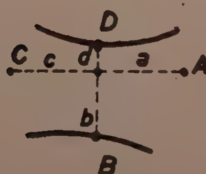


Figura 6

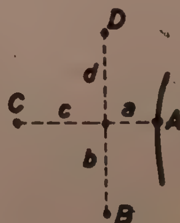


Figura 7

todos los contornos imaginables, cualquiera que sea la situación de estos contornos con respecto a la red de puntos.

Una vez en posesión de la fórmula [5] y de las que de ella se deducen, es necesario hacer que los valores de la función armónica f, que intentamos determinar, estén de acuerdo con ellos. Varios son los caminos que pueden seguirse, cada uno de los cuales tiene sus ventajas e inconvenientes. El método más usado es el de iteración, iniciado por Liebmann y desarrollado por Shortley y

Weller (5), y por Poritsky, Snively y Wylie (6), cuya fórmula elemental ha sido expuesta en el § 2. Otro procedimiento eficiente es el de relajación, debido a Christopheson y Southwell (7), y expuesto últimamente en un magnífico libro (8). También se han utilizado métodos en que se reemplaza [5] por relaciones geométricas que se resuelven y perfeccionan gráficamente (9) y (10). Para el caso de áreas rectangulares ha sido desarrollado por Moskovitz (11) un sistema especial de ecuaciones en diferencias incrementales, cuya solución permite armonizar la función f. Finalmente, Frocht (12) ha desarrollado otro procedimiento aplicable a áreas que se puedan descomponer en rectángulos y que reposa en las determinaciones de una serie de valores fundamentales correspondientes a puntos privilegiados. A continuación nos ocuparemos, en especial, del método de iteración, frecuentemente usado por nosotros, y daremos, también, un resumen de los métodos de Southwell y Frocht, menos abstractos que el de Moskovitz y más precisos que los gráficos.

4. Método de iteración perfeccionada

La aplicación repetida de la fórmula [3] o de las que de ella se derivan, permite, de acuerdo con lo explicado en el § 2, corregir los valores arbitrarios asignados a los puntos interiores de la red de puntos, cualquiera que sea la forma del contorno. Pero esta armonización es sumamente lenta y enojosa, sobre todo si se desean resultados precisos y correspondientes a puntos muy próximos.

La exactitud de la concordancia entre las soluciones de la ecuación diferencia y la ecuación diferencial aumenta al reducir las dimensiones de la red aunque, naturalmente, también aumenta con ello el trabajo necesario para resolver la ecuación diferencia.

Lo más correcto es emplear dos retículas de diferente espaciamiento que, por ejemplo, sea en la segunda mitad de la primera. Puede entonces emplearse el siguiente criterio: si los valores de f, obtenidos empleando ambos cuadrículas, difieren en menos del triplo del error permitido, el valor deducido por la más fina es satisfactorio, ya que el error es aproximadamente proporcional al cuadrado del espacio comprendido entre los puntos. Según esto, la segunda red convergirá hacia un valor, cuyo error con respecto a la verdadera solución de la ecuación de Laplace es aproximada-

mente la cuarta parte del error correspondiente a la red más basta, y la diferencia entre ambos valores será el triplo del error correspondiente a la red fina.

Al empezar la resolución de un problema han de asignarse a los puntos de la red valores arbitrarios que, al no disponer de otros problemas resueltos semejantes al propuesto, pueden ser muy erróneos y precisar de un trabajo de corrección muy grande.

Por ello se debe utilizar una red muy espaciada con sólo 15 ó 20 puntos interiores. Es preferible, además, seguir algún criterio en la elección de los valores iniciales. Recomendamos tomar columnas de puntos y atribuirles los valores que, por interpolación, se deduzcan de los puntos en que cada columna toca a los contornos, utilizando una cifra significativa más que en éstos. Se obtiene así una distribución de valores escalonados en sentido vertical. Realizando, entonces, el proceso de armonización por filas, partiendo de la superior, por ejemplo, se hace sentir en los puntos de cada fila la influencia de los dos puntos de contorno en que

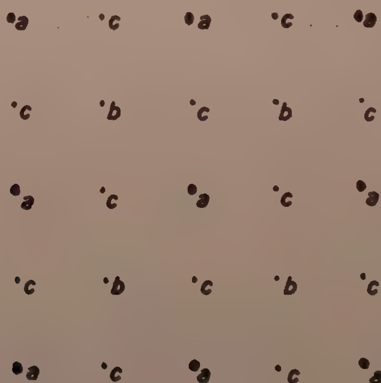


Figura 9

aquélla le toca. Así desaparecen rápidamente las irregularidades, y las sucesivas correcciones son semejantes y tendiendo a cero, tal como se explicará en el § 6.

Una vez obtenidos los valores estacionarios, por un número de pasadas suficientes o por extrapolación (§ 6) en dicha red, se pasa a otra de espaciamiento mitad, intercalando los puntos necesarios. Para ello se comienza por aplicar la fórmula diagonal [4] a los puntos centrales de cada cuadrado de la red antigua y luego se aplica la fórmula [3] a los demás puntos que se han interpolado,

en los puntos medios de las líneas de la red. Así, en la figura 8, *a* son los puntos de la primera red de los que, por media aritmética diagonal se hallan los valores de los puntos centrales *b*, pudiendo entonces determinar los puntos medios *c*.

En todos los valores, tanto los así asignados como los procedentes de la primera red, se toma otra cifra significativa más, que hace un total de dos cifras más que las de los valores de contornos. Así, los cálculos son más cómodos y el error tolerable se eleva a 50, es decir, media unidad de la última cifra significativa de los valores de contorno.

Finalmente, en ocasiones se hace necesario pasar a una tercera red, más fina. El paso se realiza del modo que acabamos de explicar, aun cuando no se suele añadir ninguna cifra significativa más.

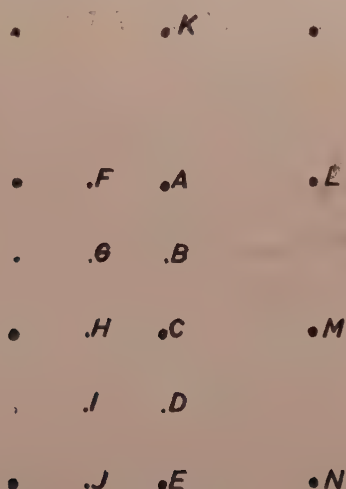


Figura 9

Cuando solamente se desea obtener la distribución precisa de los valores de *f* en una región, puede limitarse la red fina a esta región, contentándose con los resultados de una red gruesa en el resto del dominio (fig. 9). En tales casos los puntos extremos de la red fina se corrigen por fórmulas distintas a la [3], deducidas de la expresión general [5]. Así, para puntos tales como el A y el C, que forman también parte de la red gruesa, se utiliza la ecuación [5] y queda, respectivamente:

$$f'_A = \frac{f_B + f_F}{3} + \frac{f_K + f_L}{6} \qquad f'_C = \frac{f_M + 2 f_H}{9} + \frac{f_B + f_D}{9}$$

mientras que para puntos como el B, que queda frente al espacio situado entre dos puntos A, C de la red gruesa, se utiliza la ecuación,

$$f'_{B} = \frac{1}{16}\left[4 f_{G} + 5(f_{A} + f_{C}) + f_{L} + f_{M}\right]$$

5. Empleo de bloques de puntos

La razón de convergencia puede aumentarse considerablemente perfeccionando bloques de puntos en lugar de puntos aislados.

Cuando el número de puntos es suficiente, se agrupan formando bloques de 9 puntos que se limitan por un cuadrado de trazo lleno (fig. 10).

La resolución simultánea de las 9 ecuaciones de Liebmann correspondiente a cada uno de sus puntos, proporciona otras tantas

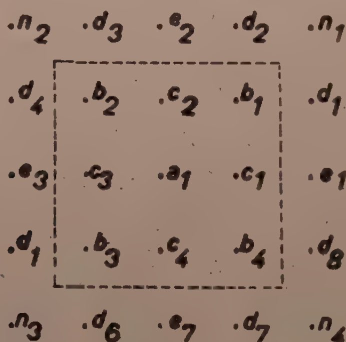


Figura 10

relaciones, que nos permiten hallar directamente el valor de f en el punto central en función de valores correspondientes a puntos situados fuera del bloque

$$f'_{A} = \frac{1}{16}\left[\Sigma f_{D} + 2\,\Sigma f_{E}\right]$$

Una vez hallado este valor se determinan los correspondientes a los puntos de las esquinas por ecuaciones del tipo

$$f'_{B_1} = \frac{1}{4}\left[f'_{A_1} + f_{E_1} + f_{E_2} + f_{N_1}\right]$$

y los valores de los cuatro puntos restantes por relaciones como

$$f''_{C_1} = \frac{1}{4}\left[f'_{A_1} + f'_{B_1} + f'_{B_4} + f_{E_1}\right]$$

En el caso de que el bloque de 9 puntos se aproxime a los contornos o, cuando por cualquier otra causa, el valor de f_N no sea conocido, el punto B_1 puede corregirse mediante la fórmula

$$f'_{B_1} = \frac{1}{8}\left[2 f'_{A_1} + f_{E_1} + f_{E_2} + 2 f_{D_1} + f_{D_2}\right]$$

Se demuestra que el número de pasadas necesarias para obtener una reducción dada en el error por el método del bloque de 9 puntos, es aproximadamente 3,5 veces menor que si hubiésemos utilizado la corrección de puntos aislados.

Cuando se trata de pequeñas áreas o de esquinas en que no se puede utilizar bloques de 9 puntos es posible corregir bloques de

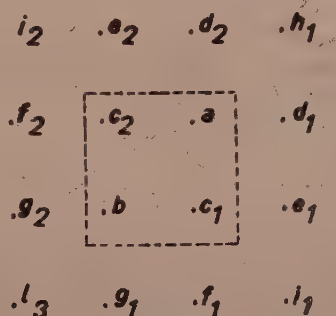


Figura 11

4 puntos en lugar de puntos aislados (fig. 11). Se comienza agrupando cada 4 puntos dentro de un cuadrado de trazo lleno y se determina el valor de F en uno de los puntos por

$$f'_A = \frac{1}{24}\left[7 \Sigma f_D + 2 \Sigma f_E + 2 \Sigma f_F + \Sigma f_G\right]$$

y, una vez conocido éste, se hacen los demás valores por

$$f'_B = \frac{1}{4}\left[f'_A + \Sigma f_F + f_I\right] \qquad f'_C = \frac{1}{4}\left[f'_A + f'_B + f_E + f_F\right]$$

La razón de convergencia es ahora mayor que en el procedimiento ordinario de Liebmann, pero menor que en la corrección por bloques de 9 puntos.

Aunque, indudablemente, la razón de convergencia sería superior al emplear bloques de 16 ó más puntos, la complicación de las fórmulas que habrían de emplearse es extraordinaria y anula las otras ventajas. Por ello no es recomendable utilizar más bloques que los de 4 ó 9 puntos.

Además de estas correcciones, uniformes dentro de cada bloque, que corresponden a «desplazamiento en masa» de los puntos correspondientes en la superficie representativa de f, pueden efectuarse «rotaciones alrededor de un eje», correcciones que varían linealmente dentro del bloque. Se sigue este procedimiento, especialmente, en el Método de Relajación (8).

6. Armonización de la corrección

El valor arbitrario que inicialmente se asigna a cada punto interior de la red, difiere de la verdadera solución de la ecuación diferencial en un error todavía desconocido. El efecto de cada corrección es reducir la magnitud de este error, dependiendo el grado de reducción de la forma de la función que lo representa. Si la marcha de esta función es suave y uniforme, el error no desaparecerá rápidamente, pero, en cambio, quedarán anuladas en las primeras pasadas las irregularidades que pudieran existir. Es entonces posible encontrar ciertas funciones del error que si son adecuadas, se reducen en cada pasada en una fracción constante, tendiendo al valor cero. Estas son las llamadas funciones características del proceso de perfeccionamiento.

Una gran economía del trabajo se obtiene si en lugar de corregir el valor de f se opera con el error hallado en la primera corrección. Para ello se realiza una primera pasada de armonización, obteniéndose una primera serie de valores corregidos. Se restan los valores iniciales para cada punto de los valores así obtenidos. estas diferencias, δ, que representan una corrección a introducir, se colocan junto al punto y se perfeccionan por las mismas fórmulas hasta ahora utilizadas. Con ello el número de cifras significativas queda, en general, reducido y los valores de los contornos son nulos. Las sucesivas correcciones proporcionan nuevos δ que for-

man una serie geométrica que tiende a cero y que permite efectuar una extrapolación.

Si f, f^{I}, f^{II}, f^{III}, f^{IV}, son los valores inicial y sucesivamente corregidos para la función f en un punto dado de la red, y si δ, δ^{I}, δ^{II}, δ^{III}, son los sucesivos valores obtenidos al operar con la corrección δ, el valor final f se obtiene por

$$f^{IV} = f^{III} + \delta^{III} = f^{II} + \delta^{II} + \delta^{III} = f^{I} + \delta^{I} + \delta^{II} + \delta^{III} =$$
$$= f + \delta + \delta^{I} + \delta^{II} + \delta^{III}$$

Se demuestra que la serie representada por los sucesivos valores de la corrección tiende hacia un valor finito y que, tras las primeras pasadas, cada δ es una fracción constante de la anterior.

Supongamos que después de haber hecho K correcciones sobre la red diferencia los valores en cada punto se reducen en una fracción constante, cada vez que se repite la operación, esto es,

$$\delta^{(K+I)} = \lambda\,\delta^{(K)}$$

entonces los sucesivos valores de la diferencia pueden ser representados por

$$\delta^{(K)} \quad \lambda\,\delta^{(K)} \quad \lambda^{2}\,\delta^{(K)} \quad \lambda^{3}\,\delta^{(K)}$$

y la suma que debe ser añadida al valor inicial de f es

$$\delta^{I} + \delta^{II} + \ldots + \delta^{(K-I)} + \delta^{(K)} + \lambda\,\delta^{(K)} + \lambda^{2}\,\delta^{(K)} + \ldots =$$
$$= \delta^{I} + \delta^{II} + \ldots + \delta^{(K-1)} + \delta^{(K)}(1 + \lambda + \lambda^{2} + \ldots) =$$
$$= \delta^{I} + \delta^{II} + \ldots + \delta^{(K-1)} + \frac{\delta^{(K)}}{1-\lambda}$$

Determinado por este procedimiento la suma de las series de los valores que, en las sucesivas pasadas toma la corrección, y sumándola al primer valor perfeccionado, se obtiene un valor de f muy aproximado a la verdadera solución de la ecuación diferencial de Laplace en la región considerada. Conviene, sin embargo, dar una última pasada de armonización con los valores de f obtenidos tras de la extrapolación. Si hay apenas variación los valores de f son válidos. En caso contrario deben repetirse las operaciones antes indicadas o pasar a otra red más fina.

7. Otra generalización de la fórmula de Liebmann

En el § 3 hemos generalizado la fórmula [3] a «estrellas» o redes irregulares, pero sin que en ella figuraran otros valores de f que los que esta función toma en los puntos más próximos al que se intenta corregir.

Esta limitación de los puntos tomados en consideración ha de reducir, consecuentemente, la magnitud de la corrección, alargando el número de pasadas necesarias hasta que se reproduzcan los valores de f, máxime si, como sucede frecuentemente, hay grandes diferencias entre los valores asignados en un principio a puntos no muy lejanos.

Al objeto de aumentar la convergencia de los sucesivos valores de f en cada punto, y de llegar con más exactitud y rapidez a va-

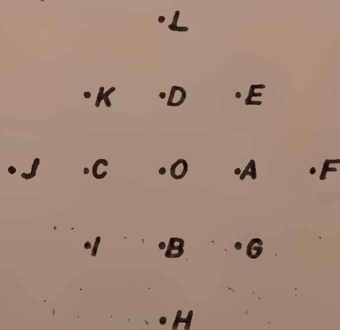


Figura 12

lores que sigan una marcha uniforme, y a los que se les pueda aplicar la extrapolación explicada en el § 6, conviene utilizar en lugar de [3] otra fórmula en que intervenga un número de puntos mayor.

Para ello basta aplicar [3] a los puntos A, B, C, D (fig. 12)

$$f_A = \frac{1}{4}[f_E + f_F + f_G + f_O]$$

$$f_B = \frac{1}{4}[f_O + f_G + f_H + f_I]$$

$$f_C = \frac{1}{4}[f_K + f_O + f_I + f_J]$$

$$f_D = \frac{1}{4}[f_L + f_E + f_O + f_K]$$

sumar las cuatro expresiones y despejar f_0. Así se obtiene

$$f_0 = f_A + f_B + f_C + f_D - \frac{1}{4}[2f_E + f_F + 2f_G + f_H + 2f_I + f_J + 2f_K + f_L]$$

en la que intervienen doce puntos en lugar de los cuatro que figuraban en [3].

Sin embargo, al llevar a la práctica esta fórmula aparecen grandes inconvenientes. En primer lugar, es necesario tomar unos nudos ficticios alrededor de todo el contorno y atribuirles un valor que es muy inseguro, pues no hay más contacto con la realidad que la línea de puntos del contorno. Resulta así que el trabajo necesario para hallar los valores de los nodos ficticios es, si el modelo es pequeño, comparable al de la resolución entera del problema por el método ordinario.

Pero, además, como la mayor parte de los doce valores que intervienen en la fórmula anterior han sido arbitrariamente elegidos, no se puede obtener la convergencia esperada, siendo inútil el exceso de trabajo de cálculo sobre el procedimiento ordinario, en que la mayor parte de las operaciones se pueden hacer con la cabeza.

8. Método de relajación

En este procedimiento, muy desarrollado en los últimos años por Southwell y sus colaboradores, se parte de los mismos principios que en el de Liebmann, pero se adopta un punto de vista más general, obteniéndose procedimientos que sirven para resolver la ecuación de Laplace, la de Poisson y otras más complicadas.

Para hacer más intuitivo y claro el procedimiento se sustituye el problema en cuestión por el de una red de hilos elásticos sometida en los contornos a desplazamientos normales, proporcionales a los valores de contorno de f. Queda así sustituída la ecuación diferencial por una serie de relaciones que, en cada nudo, han de cumplir las fuerzas aplicadas (nulas en el caso de la ecuación de Laplace), la tensión de los hilos y los desplazamientos de cada nudo.

Establecido un sistema inicial de desplazamientos (es decir, un conjunto de valores de f en los nudos) no sucederá, en general, que las fuerzas que actúan sobre cada nudo se equilibren mutuamente, sino que darán una resultante llamada fuerza residual. Basta enton-

ces imponer desplazamientos adecuados, punto por punto o por bloques de puntos, para que las fuerzas residuales vayan disminuyendo. Cuando, finalmente, todas estas fuerzas son nulas, la red de hilos elásticos está en equilibrio y el desplazamiento de cada nudo representa el valor que allí toma, dentro de esta aproximación, la función *f*.

El cálculo es convergente, pues la red en equilibrio toma la configuración de mínima energía potencial de deformación. Teniendo práctica en la aplicación de este método se logra una convergencia más rápida que en el procedimiento de iteración de Liebmann. Pero su aplicación no es tan sistemática como en aquel caso, no siendo, pues, un mero trabajo de calculista, como ocurre en el procedimiento de iteración de Liebmann.

Se utilizan indistintamente redes de triángulos o de cuadrados, debiendo utilizarse en cada caso fórmulas particulares para calcular la modificación que un desplazamiento de un nudo dado introduce en los desplazamientos y fuerzas residuales de los vecinos.

9. Método de los valores privilegiados

Consiste este procedimiento en pasar de los valores de *f* en el contorno a unos ciertos valores clave, a partir de los cuales se pue-

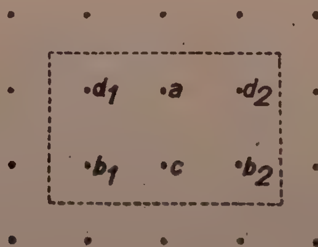


Figura 18

den hallar, por aplicación de la fórmula de Liebmann en sentido normal [3] o diagonal [4], todos los demás valores, salvo dos o tres, para los cuales es necesario acudir a la fórmula [5] o a sus derivadas.

El procedimiento es sólo aplicable a rectángulos o a dominios que se puedan descomponer en rectángulos, como ángulos, figuras en T o en Z, etc.

Así, por ejemplo, en el caso de un cuadrado con cuatro puntos

interiores, un solo valor basta para determinar los otros, según vimos al tratar de bloques de cuatro puntos (fig. 10).

Si se trata de un rectángulo con seis puntos interiores (fig. 13), basta determinar el valor de un punto central como el *a*, que para que queden determinados todos los demás valores, los de b_1, b_2 por aplicación diagonal de la fórmula de Liebmann y los de *c* y d_1, d_2 por aplicación normal de dicha fórmula.

En el caso de un cuadrado con nueve puntos interiores, basta hallar el valor del punto central, tal como vimos al hablar de bloques de nueve puntos (fig. 11).

Fórmulas parecidas pueden ser deducidas para rectángulos, completos o incompletos, conteniendo otro número de puntos interiores y para los casos en que los rectángulos no sean completos, es decir, que alguno de sus lados no caiga sobre una fila de puntos.

Todavía se pueden poner estos valores en función de ciertas sumas de un valor de contorno, llamadas perímetros de Liebmann, que han sido calculadas, juntamente con otros coeficientes que intervienen en las fórmulas, por Frocht. Por ello este método representa un ahorro de tiempo sobre el inicial, pero, repetimos, sólo puede ser aplicado en contornos muy sencillos.

Instituto de Optica «Daza de Valdés».
Sección de Optica Física.

Presentado en la sesión del 3-III-47.

BIBLIOGRAFIA

(1) W. G. BICKLEY.—*Mat. Gaz.* 23, p. 25.

(2) L. VILLENA.—*Fotoelasticidad.* Madrid (1944).

(3) H. LIEBMANN.—*Sitzungber. Bay. Akad. Wiss.* Munchen (1918), p. 386.

(4) P. FRANK y R. VON MISES.—*Differential -und Integralgleichungen der Mechanik und Physik.* Braunschweig (1935).

(5) J. H. SHORTLEY y R. WELLER.—*J. Appl. Phys.* **9** (1938), p. 344-348 y *J. Appl. Mech.* **6** (1939), p. A-71-78.

(6) H. PORITSKY, H. D. SNIVELY y G. R. WYLIE.—*J. Appl. Mech.* **6** (1939), p. A-63-66.

(7) D. G. CHRISTOPHERSON y R. V. SOUTHWELL.—*Proc. Roy. Soc.* **A-168** (1938), p. 317-350.

(8) R. V. SOUTHWELL.—*Relaxation Methods in Theoretical Physics.* Oxford U. Press. (1946).

(9) A. CASAGRANDE.—*J. New Engl. Water Works Ass.* **51** (1937), p. 131-172

(10) L. F. RICHARDSON.—*Proc. Roy. Dublin Soc.* **11** (1908), p. 295-316.

(11) D. MOSKOVITZ.—*Quart. Appl. Math.* **2** (1944), p. 48-163.

(12) M. M. FROCHT.—*J. Appl. Phys.* **17** (1946), p. 730-742.

12. LA TEORIA GENERAL DE REDES CON ELECTRONICA Y SUS APLICACIONES AL CALCULO Y GOBIERNO AUTOMATICOS. III. ECUACIONES DIFERENCIALES LINEALES DE COEFICIENTES PERIODICOS, *por* J. BALTÁ, A. GONZÁLEZ DEL VALLE *y* J. A. GÓMEZ GARCÍA.

SUMMARY

Employing tubes having a variable slope a method has been studied and deviced to alter the apparent capacity and selfinduction of an oscillating circuit in such a way as to obtain a current equal in every instant to the solution of a second degree linear differential equation with periodical factors.

En el desarrollo de la Memoria de una calculadora electrónica (1) proyectada en la Sección de Electricidad del Instituto Nacional de Física se ha presentado el problema de producir una oscilación engendrada en un circuito con autoinducción y capacidad dependientes de una cierta tensión mediante una determinada ley.

El problema se resolvió mediante una reacción apropiada que ha dado origen a un método general para la resolución de ecuaciones diferenciales lineales de coeficientes periódicos y orden cualquiera.

Con objeto de facilitar la exposición, vamos a limitarnos en este trabajo a la resolución de una ecuación diferencial de segundo orden y coeficientes periódicos, dado que, por otra parte, son éstas las de mayor interés técnico.

Sea la ecuación

$$\frac{d^2 u}{d x^2} + \left[h - \frac{\frac{h^2}{2} - \frac{1}{4}}{\operatorname{sen}^2 x} - \frac{1}{8} \operatorname{ctg}^2 x \right] u = 0 \qquad [1]$$

Efectuando el cambio de la variable independiente $x = \omega t$ y poniendo $u = Q$ la ecuación dada se reduce a la

$$\frac{1}{\omega^2} \frac{d^2 Q}{dt^2} + \left(h - \frac{\frac{h^2}{2} - \frac{1}{4}}{\operatorname{sen}^2 \omega t} - \frac{1}{8} \frac{\cos^2 \omega t}{\operatorname{sen}^2 \omega t} \right) Q = 0 \qquad [2]$$

(1) A. GONZÁLEZ DEL VALLE *y* J. A. GÓMEZ GARCÍA.—«La Máquina Electrónica para la Resolución de Ecuaciones Algébricas». *Memoria de Matemática* número 6 del «Instituto Jorge Juan» del C.S.I.C.

multiplicando por $2 \operatorname{sen}^2 \omega t$ y sustituyendo $2 \operatorname{sen}^2 \omega t$ por $1-\cos 2\omega t$ y $2\cos^2 \omega t$ por $1+\cos 2\omega t$ queda

$$\frac{1}{\omega^2}\,\frac{d^2 Q}{dt^2}(1-\cos 2\omega t)+[h(1-\cos 2\omega t)-h^2+\frac{1}{2}-$$
$$-\frac{1}{8}(1+\cos 2\omega t)]\,Q=0 \qquad [3]$$

luego Q es la carga de un condensador de elastancia

$$\frac{1}{c}=h(1-\cos 2\omega t)-h^2+\frac{1}{2}-\frac{1}{8}(1+\cos 2\omega t)=$$
$$=h-h^2+\frac{3}{8}-\left(h+\frac{1}{8}\right)\cos 2\omega t \qquad [4]$$

puesto en serie con una bobina de inductancia

$$L=\frac{1}{\omega^2}-\frac{\cos 2\omega t}{\omega^2} \qquad [5]$$

El problema se descompone, pues, en dos: encontrar una elastancia $\frac{1}{c}$ de la forma

$$\frac{1}{c}=h-h^2+\frac{3}{8}-\left(h+\frac{1}{8}\right)\cos 2\omega t$$

y una inductancia L de la forma

$$L=\frac{1}{\omega^2}-\frac{\cos 2\omega t}{\omega^2}$$

a) *Obtención de una elastancia* $\frac{1}{c}$ *de la forma*

$$\frac{1}{c}=h-h^2+\frac{3}{8}-\left(h+\frac{1}{8}\right)\cos 2\omega t$$

El problema de obtener la elastancia $\frac{1}{c}$ es el de disminuir una elastancia

$$h-h^2+\frac{3}{8}$$

en una cantidad

$$+\left(h+\frac{1}{8}\right)\cos 2\,\omega t$$

es decir, disminuir la caída de potencial de la carga Q determinada a través de una serie de condensadores de elastancia $\frac{1}{c}$ en una cantidad

$$\left(h+\frac{1}{8}\right)Q\cos 2\,\omega t$$

lo cual puede realizarse permitiendo en uno de los condensadores de la serie de capacidad C'_2 la descarga de una cantidad de electricidad de valor

$$C'_2\left(h+\frac{1}{8}\right)Q\cos 2\,\omega t$$

Esta descarga puede ser realizada a través de un pentodo de resistencia interior muy elevada cuya rejilla de mando reciba una señal proporcional a la corriente de carga i_2 de la serie de condensadores, pues de ese modo la descarga del condensador, C'_2, será proporcional a la carga Q de la serie.

La referida señal de rejilla puede proceder de las armaduras de otro de los condensadores de la serie de capacidad C_2; pero como la tensión entre las armaduras de C_2 no es proporcional a la corriente de carga i_2 sino a la cantidad de electricidad Q, aquélla habrá de ser derivada, lo que puede lograrse intercalando otro pentodo cuya salida se acople por transformador al circuito de rejilla del primer pentodo referido, que juntamente con el otro constituye así un sistema unilateral.

El número de condensadores de la serie puede, de este modo, reducirse a los dos que se representan en la figura 1, juntamente con los pentodos referidos, su acoplamiento y el condensador de paso C de muy elevada capacidad.

Si la pendiente P_2 es de la forma

$$P_2 = A + B\cos 2\,\omega t$$

la elastancia $\frac{1}{c}$ será

$$\frac{1}{c}=\frac{1}{c_2}+\frac{1}{c'_2}+\frac{M_2\,A\,P'_2}{c_2\,c'_2}+\frac{M_2\,P'_2}{c_2\,c'_2}B\cos 2\,\omega t \qquad [6]$$

luego para que en todo caso sea igual a

$$h - h^2 + \frac{3}{8} - \left(h + \frac{1}{8}\right) \cos 2\,\omega t$$

es necesario y suficiente que

$$\frac{1}{c_2} + \frac{1}{c'_2} + \frac{M_2\,P'_2}{c_2\,c'_2}\,A = h - h^2 + \frac{3}{8} \qquad [7]$$

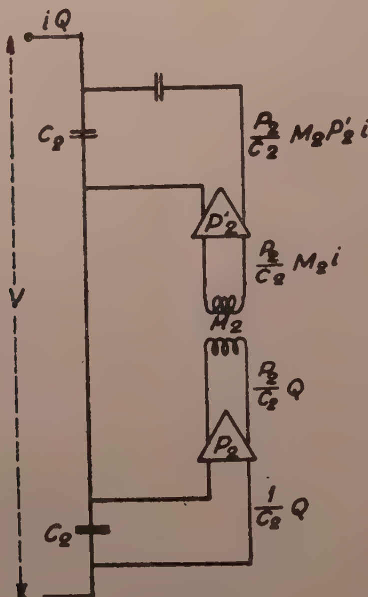


Figura 1

Dipolo equivalente a una elastancia $\frac{1}{c_2} + \frac{1}{c'_2} + \frac{M_2\,P_2\,P'_2}{c_2\,c'_2}$. Las expresiones próximas a las entradas de los amplificadores indican las tensiones aplicadas a estos y las próximas a las salidas las corrientes que de ellos se obtienen.

y

$$\frac{M_2\,P'_2}{c_2\,c'_2}\,B = -\left(h + \frac{1}{8}\right) \qquad [8]$$

de donde

$$\frac{M_2\,P'_2}{c_2\,c'_2} = -\frac{1}{B}\left(h + \frac{1}{8}\right)$$

que sustituída en la [7] nos da

$$\frac{1}{c_2} + \frac{1}{c'_2} = h - h^2 + \frac{3}{8} + \frac{A}{B}\left(h + \frac{1}{8}\right) \qquad [9]$$

$$\frac{1}{c_2} \cdot \frac{1}{c'_2} = - \frac{1}{M_2\, P'_2\, B}\left(h + \frac{1}{8}\right) \qquad [10]$$

Las expresiones [9] y [10] definen C_2 y C'_2 para una ecuación dada (h conocido) y un sistema unilateral también determinado (M_2, P'_2, A y B conocidos).

Queda aún el problema técnico de encontrar el mejor sistema unilateral (M_2, P'_2, A y B) para un valor dado de h.

b) *Obtención de la inductancia* L *de la forma*

$$L = \frac{1}{\omega^2} - \frac{\cos 2\,\omega t}{\omega^2} \qquad [11]$$

El problema de realizar la inductancia L es el de disminuir una inductancia de valor $\frac{1}{\omega^2}$ en una cantidad

$$\frac{\cos 2\,\omega t}{\omega^2}$$

o sea, el de inducir en una de las bobinas de una serie de inductancia total L, una fuerza electromotriz de valor

$$\frac{\cos 2\,\omega t}{\omega^2}\,\frac{di}{dt} = \frac{\cos 2\,\omega t}{\omega^2}\,i'$$

siendo i la corriente que recorre esa serie de bobinas. Esto puede lograrse acoplando una de las bobinas de la serie mediante un coeficiente de inducción mutua M'_1 a un circuito recorrido por una corriente proporcional a i, que a su vez puede obtenerse integrando la señal recogida de otra de las bobinas de la serie, mediante un acoplamiento de coeficiente M_1.

La integración puede efectuarse poniendo a la salida del pentodo que recibe la señal mediante M_1, un condensador de reactancia despreciable respecto de la resistencia interior del pentodo ; luego el artificio puede ser el esquematizado en la figura 2, en el cual se han reducido a dos las bobinas de la serie referida.

Si la pendiente P_1 es de la forma

$$P_1 = A + B \cos 2\omega t$$

la inductancia L será:

$$L = \mathcal{L}_1 + \mathcal{L}'_1 + \frac{M'_1 M_1 P_1 P'_1}{c_1} \qquad [12]$$

luego para que en todo caso sea igual a

$$\frac{1}{\omega^2} - \frac{1}{\omega^2} \cos 2\,\omega t$$

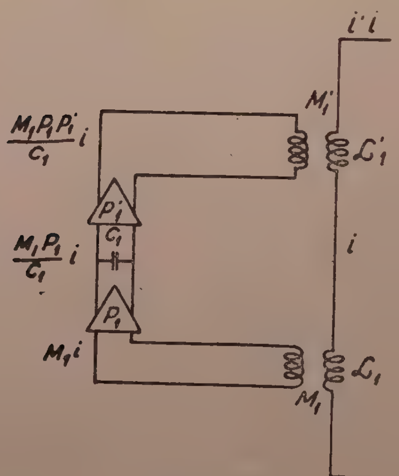


Figura 2

Dipolo equivalente a una inductancia $\mathcal{L}_1 + \mathcal{L}'_1 + \frac{M'_1 M' P' P'_1}{c_1}$

Las expresiones próximas a las entradas de los amplificadores indican las tensiones aplicadas a éstas y las próximas a las salidas las corrientes que de ellos se obtienen.

es necesario y suficiente que

$$\mathcal{L}_1 + \mathcal{L}'_1 + \frac{M_1 M'_1 P'_1}{c_1} A = \frac{1}{\omega^2} \qquad [13]$$

y

$$\frac{M_1 M'_1 P'_1}{c_1} B = \frac{1}{\omega^2} \qquad [14]$$

de donde

$$\frac{M_1 M'_1 P'_1}{c_1} = -\frac{1}{B\,\omega^2} \qquad [15]$$

que sustituída en la [13] nos da:

$$\mathfrak{L}_1 + \mathfrak{L}'_1 = \frac{1}{\omega^2}\left(1 + \frac{A}{B}\right) \qquad [17]$$

y

$$\mathfrak{L}_1 \mathfrak{L}'_1 = -\frac{C_1}{BR_1\, R'_1\, P'_1\, \omega^2} \qquad [16]$$

siendo

$$M_1 = R_1 \mathfrak{L}_1 \quad \text{y} \quad M'_1 = R'_1 \mathfrak{L}'_1 \qquad [19]$$

que definen $\mathfrak{L}_1$ y $\mathfrak{L}'_1$ para cualquier ecuación (no dependen de h) y un sistema unilateral determinado ($R_1\, R'_1\, P'_1\, C_1\, B$ conocidos).

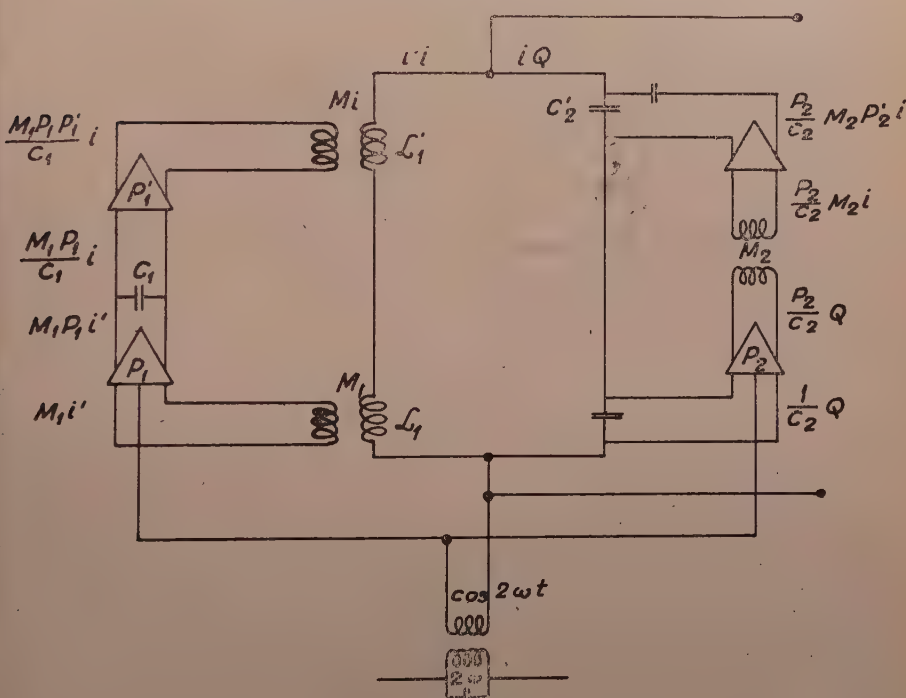


Figura 3

Circuito que oscila respondiendo a la ecuación $\frac{d^2 u}{dx^2} + \left(h - \frac{h^2 - \frac{1}{2}}{\operatorname{sen}^2 x} - \frac{1}{4}\operatorname{ctg}^2 x\right) u = 0$ con $u = Q$ y $x = \omega t$ cuando siendo $P_1 = P_2 = A + B \cos 2\omega t$ son $\frac{1}{c_2} + \frac{1}{c'_2} = h - h^2 - \frac{1}{8} + \frac{A}{B}\left(h + \frac{1}{8}\right)\frac{1}{c_2}\,\frac{1}{c'_2} = -\frac{1}{M_2 P'_2 B}\left(h + \frac{1}{8}\right)$, $\mathcal{L}_1 + \mathcal{L}'_1 + \frac{1}{\omega^2}\left(1 + \frac{A}{B}\right)$, $\mathcal{L}_1 \mathcal{L}'_1 = \frac{c_1}{BR_1\, R'_1\, P'_1\, \omega^2}$

$M_1 = R_1 \mathcal{L}_1 \qquad M'_1 = R'_1 \mathcal{L}'_1$

Aquí se presenta el problema técnico de encontrar el mejor sistema unilateral para este tipo de ecuaciones.

Para completar la resolución de los problemas en que se ha dividido el propuesto, queda solamente realizar la igualdad

$$P_1 = P_2 = A + B \cos 2\omega t$$

para lo cual basta atacar adecuadamente las rejillas pantallas de dos pentodos apropiados con una tensión $\cos 2\omega t$ procedente de un oscilador ordinario y el esquema completo será el representado en la figura 3.

Instituto de Física «Alonso de Santa Cruz».

13 GENERACION DE OSCILACIONES COMPLEJAS POR MEDIO DEL CIRCUITO TRANSITRON, *por* LUIS MIRANDA GONZÁLEZ-MONTES.

SUMMARY

The author has observed suppressor grid electron absorption during oscillation of a transitron circuit, as also electron emission as a result of secondary emission phenomena for large oscillation amplitudes. This is the cause of the discontinuity which appears in the characteristic curves for the suppressor grid during oscillation of the circuit.

The author has made use of this phenomenon, in producing a relaxation oscillation in the recharging circuit, and has studied those conditions under which the oscillation may be produced.

Finally he has contrived a device, based on the foregoing experiences, which offers the peculiarity of being able to produce sinusoidally modulated, relaxation and supermodulated oscillations, and impulse waves, and which proved, experimentally, theoretical considerations, the exposition of which has already been made. The results are given in a series of oscillograms typical for the different types of oscillations reviewed.

INTRODUCCION

La idea de estudiar el comportamiento del oscilador transitrón en sus puntos extremos de funcionamiento, en los que es de esperar la producción de oscilaciones complejas, nos fué sugerida al proyectar un aparato destinado al estudio de la ionosfera por medio de la detección de «ecos» eléctricos. Es sabido que tal estudio requiere la producción de trenes de ondas de alta frecuencia, con duraciones del orden de los 10 microsegundos, y de amplitud aproximadamente constante durante toda la duración del impulso, pero muy superior a la residual durante el tiempo comprendido entre dos impulsos consecutivos. Para conseguir este tipo especial de oscilación electrónica se han empleado diversos dispositivos, basados en el empleo de un oscilador de onda continua, cuya excitación es cortada periódicamente por medio de otro circuito, generalmente de relajación, de frecuencia ajustada a la cadencia de los impulsos repetidos. También puede actuar el oscilador de relajación «bloqueando periódicamente un paso amplificador del aparato emisor; en este caso, el oscilador de alta frecuencia está funcionando con-

tinuamente, pero la energía producida por él, no llega al sistema irradiante, sino cuando lo permite el oscilador auxiliar.

Los métodos expuestos, usados en la generación de impulsos eléctricos requieren el empleo de dos osciladores independientes, cuya interacción produce la onda deseada. Nuestro propósito ha sido conseguir este mismo tipo de onda empleando un solo circuito oscilante, de tales características que su propia oscilación modifique las condiciones de funcionamiento produciendo fenómenos secundarios cuya acción sustituye a la del circuito externo modulador.

Varios tipos de circuitos fueron estudiados sucesivamente con vista a su aplicación al fin deseado.

En un principio se pensó utilizar los efectos secundarios provocados por la captación de iones por la rejilla (aun a potencial negativo) utilizando la «Oscilación de Relajación», que se observa en los circuitos oscilantes cuando la resistencia de retorno de rejilla es lo suficientemente grande para no permitir fácilmente el paso de los iones eventualmente captados por ella. Sin embargo, la inestabilidad inherente a este método de oscilación nos hizo abandonar su estudio.

La idea que intentamos desarrollar a continuación, fué la combinación de ambos circuitos en la misma válvula. De estos circuitos, uno—el de alta frecuencia—había de ser de oscilación sinusoidal; para el otro—modulador—convenía una onda de tipo de relajación o multivibrador. Los circuitos mezcladores corrientes empleados en el proceso de heterodinación están proyectados para la producción y mezcla de dos oscilaciones sinusoidales, por lo que no servían para este caso. En estas circunstancias decidimos ensayar el circuito transitrón.

Este circuito, cuyo elemento electrónico es una válvula pentodo, tenía, como haremos resaltar en el capítulo II, las siguientes ventajas:

1.° Es un oscilador de resistencia negativa, con todas las ventajas inherentes a tal sistema.

2.° Es independiente del caprichoso fenómeno de la emisión secundaria.

3.° Sus condiciones de estabilidad y pureza de onda son máximas.

4.° El circuito transitrón—y ésta es tal vez su característica más saliente—emplea como elementos fundamentales en la oscilación la rejilla pantalla y la supresora, relegando a la rejilla de mando y a la placa al cometido secundario de electrodos auxiliares sometidos a una tensión continua. Ahora bien; en los circuitos normales, los elementos oscilantes son precisamente estos últimos, mientras que el papel de electrodos estáticos queda reservado a los primeros. Obtenida, pues, la oscilación de alta frecuencia con los electrodos normalmente menos influyentes (pantalla y supresora), disponemos aún de electrodos diseñados para provocar las perturbaciones más intensas en la corriente electrónica de la válvula, para modificar con ellos las condiciones de la oscilación de alta frecuencia, provocando la onda compleja.

Los resultados a que hemos llegado por tal camino han respondido por completo a las esperanzas que en él pusimos. Por la pantalla fluorescente del tubo de rayos catódicos hemos visto desfilar las formas de onda más sorprendentes. Entre ellas, la onda continua modulada sinusoidalmente, la onda continua modulada en relajación, la onda portadora sobremodulada, el tren de ondas amortiguado, y finalmente la que nos impulsó a realizar este estudio; la onda de impulsos rectangulares estrechos, empleada en la captación de ecos eléctricos, y cuya última y sorprendente aplicación a la radiolocalización (Radar), es uno de los resultados más positivos de la electrónica.

Exponemos en los capítulos siguientes la teoría general del sistema, así como su aplicación a la explicación de los fenómenos observados. Al propio tiempo describimos los dispositivos empleados y los oscilogramas que recogen los resultados obtenidos.

EL TRANSITRON COMO OSCILADOR SINUSOIDAL

a) *Reseña histórica.*—El circuito oscilador transitrón aparece descrito por primera vez—según nuestras noticias—en un trabajo de Brunetti en la *Review of Scientific Instruments,* el año 1939, con el título «Practical negative Resistance Oscillator» (1), sobre el que insiste el mismo año en los *Proceedings of the Institute of Radio Engineers,* en un nuevo trabajo titulado «Transitron Oscillator» (2).

Las cualidades sobresalientes del nuevo circuito—que haremos resaltar a continuación—fueron causa del rápido desarrollo de sus aplicaciones y de la extensión de su técnica, que aparece tratada casi sin interrupción, bien directamente, o con alusiones, en las distintas revistas técnicas relacionadas con la electrónica aplicada. Así, encontramos artículos de vulgarización del transitrón—en los que se detallan principalmente sus aplicaciones prácticas y detalles de construcción—, en las revistas *Radio Mentor* (1940 y 1944) (3) y (4) y *Radio Magazine* (1943) (5), al lado de trabajos de más categoría científica, relativos al circuito que nos ocupa, en las publicaciones *Communications* (6), años 1944 y 1945, *Wireless Engineers* (1945) (7), *Wireless World* (1944) (8) y *Electronic Engineering* (1945) (9).

Una teoría resumida del circuito se encuentra en el libro de Williams, *Thermionic Valve Circuits*, publicado en Londres en 1944 (10). Por las limitaciones, bien conocidas, de intercambio de revistas, la bibliografía expuesta no es—ni pretende ser—exhaustiva; pero creemos sirve para dar idea de lo realizado en este aspecto por los distintos investigadores y experimentadores.

b) *Teoría elemental del transitrón.*—Para una comprensión más fácil del trabajo presente, resumimos brevemente a continuación la teoría elemental del transitrón, recogida de la bibliografía expuesta en el párrafo anterior.

En el circuito transitrón se emplea como elemento electrónico una válvula pentodo, pero el esquema de conexión difiere fundamentalmente de los dispositivos empleados corrientemente; en efecto, normalmente, se emplea la válvula pentodo manteniendo, tanto la rejilla pantalla como la supresora, sometidas a una tensión continua, mientras que la tensión alterna provocada en la rejilla de mando, induce una nueva tensión alterna en la placa.

En el circuito transitrón, que—siguiendo el razonamiento clásico para el estudio de los osciladores—, consideraremos primeramente como amplificador, en el que se provoca una realimentación, los papeles están cambiados; ni el ánodo, ni la rejilla de mando, juegan ningún papel en los circuitos de c. a., sus tensiones son puramente continuas, funcionando tales electrodos simplemente como auxiliares; en su lugar, la tensión alterna provocada en la primera rejilla, provoca variaciones de tensión en la rejilla pantalla. De esta forma pasan estos dos últimos electrodos a ser los fun-

damentales en el circuito. Por tanto, en un transitrón conectado como amplificador, la tensión excitadora se aplicará a la rejilla supresora, obteniéndose la tensión de salida en el circuito de la rejilla pantalla, según se indica en la figura 1.

El mecanismo por el cual las variaciones de tensión de la rejilla supesora provocan cambios correspondientes en la pantalla, es también totalmente diferente del efecto provocado por la rejilla sobre la corriente de placa de un triodo. La tensión de la rejilla supresora no actúa—no puede actuar—sensiblemente sobre la emisión elec-

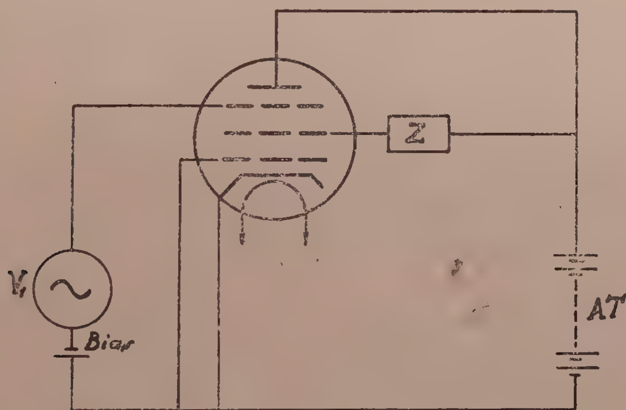


Figura 1
Conexión de principio del amplificador transitrón.

trónica del cátodo, mientras la tensión de la rejilla pantalla se mantenga constante, pues su inducción electrostática sobre el campo que rodea aquél, queda cortada por la interposición de la rejilla pantalla que aisla realmente el cátodo de las influencias externas. Su acción se limita a variar la distribución de la emisión catódica entre los dos electrodos situados a alto potencial positivo. En efecto, suponiendo la placa y la pantalla al mismo potencial, y la rejilla supresora a la misma tensión que el cátodo, la corriente electrónica es casi totalmente captada por la placa. Si en estas condiciones, empero, se comunica una tensión negativa creciente a la rejilla supresora, los electrones en camino hacia el ánodo se encuentran rechazados por ésta—que impide su «tránsito» a través de ella—y son captados por la rejilla pantalla. De esta forma, una disminución de la tensión de la rejilla supresora provoca un aumento de la corriente de ánodo (en este caso la pantalla), efecto opuesto al pro-

vocado por la disminución de la tensión de la rejilla de mando de un triodo; este fenómeno justifica la clasificación del transitrón como circuito de transconductancia negativa, y, como expondremos en el razonamiento matemático que sigue, equivale a la introducción de una verdadera resistencia negativa en el circuito de pantalla.

Obtenidas las características estáticas de un pentodo conectado en transitrón en función de la tensión de supresora, pueden—a semejanza de los parámetros definidos en el triodo—definirse los concepto de resistencia interna, coeficiente de amplificación, y pendiente o transconductancia, que designaremos respectivamente por ρ', μ' y S', y que responderán a las siguientes ecuaciones:

Coeficiente de amplificación: $$\mu' = \left(\frac{\partial E_B}{\partial E_S}\right)_{I_B = K} \qquad [2\text{-}1]$$

Resistencia interna: $$\rho' = \left(\frac{\partial E_B}{\partial I_B}\right)_{E_S = K} \qquad [2\text{-}2]$$

Pendiente: $$S' = \left(\frac{\partial I_B}{\partial E_S}\right)_{E_B = K = \text{constante}} \qquad [2\text{-}3]$$

verificándose: $$\rho' = \frac{\mu'}{S'} \qquad [2\text{-}4]$$

En estas condiciones puede atacarse el problema del funcionamiento del amplificador y oscilador transitrón a partir de la disposición del campo eléctrico en el interior de la válvula; resulta, sin embargo, más sencillo y suficiente para nuestro propósito, partir de los coeficientes establecidos en las ecuaciones anteriores, considerando el circuito equivalente dibujado en la figura 2. Según él, la tensión alterna que aparece en los extremos de la carga Z conectada en el circuito de pantalla es:

$$V_z = \frac{-\mu V_s Z}{\rho' + Z} \qquad [2\text{-}5]$$

donde el signo — indica que un aumento de tensión en la rejilla supresora provoca una disminución de la tensión en el circuito de utilización Z.

La ecuación [2-5] es la fundamental de funcionamiento de un circuito amplificador transitrón. Si ahora provocamos una reali-

mentación, haciendo que una parte de la tensión de salida V_z actúe como tensión excitadora, podremos escribir

$$V_s = -K V_z \qquad [2\text{-}6]$$

Donde K es un número complejo, pero cuya parte imaginaria es

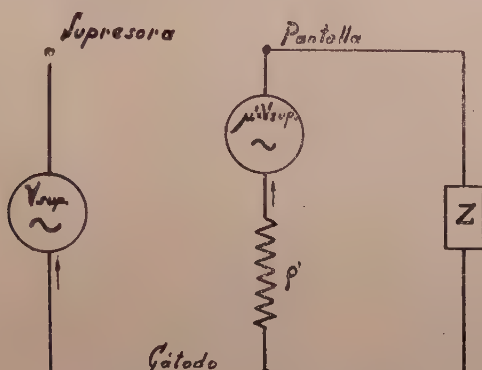


Figura 2
Esquema equivalente del circuito transitrón.

—en los osciladores corrientes—muy inferior a su parte real, positiva.

Igualando las ecuaciones [2-5] y [2-6] se obtiene:

$$\frac{V_s}{K} = \frac{\mu' V_s Z}{\rho' + Z} \qquad [2\text{-}7]$$

o sea:

$$\rho' + Z = K \mu' Z \qquad [2\text{-}8]$$

que también podemos poner de la forma:

$$Z + \frac{\rho'}{1 - K\mu'} = 0 \qquad [2\text{-}9]$$

La ecuación [2-9] implica la condición de que la resistencia total en el circuito de rejilla pantalla sea nula, y se produzcan, por tanto, oscilaciones entretenidas. El segundo término impone, siendo la parte real de $K\mu'$ mayor que la unidad, una impedancia, cuya parte real es negativa, y por tanto, la reacción pantalla-supresora equivale a la introducción de una resistencia negativa en

el circuito de aquélla, fenómeno que justifica el nombre de oscilador de resistencia negativa que se da al transitrón.

El signo negativo del segundo miembro de la ecuación [2-5] permite producir este acoplo en un sencillo circuito resistencia-

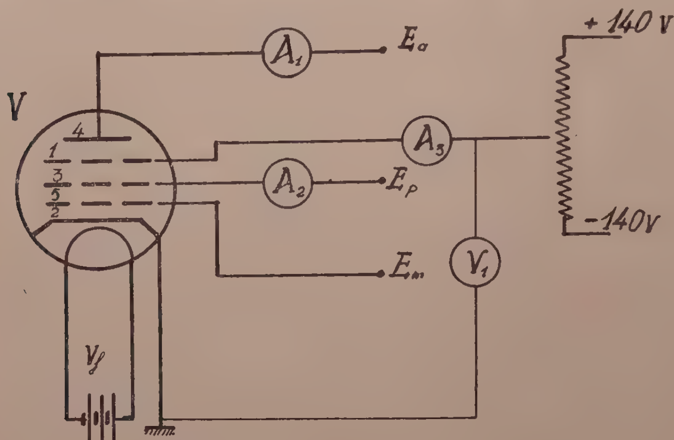


Figura 3

Obtención de las características estáticas de un pentodo en montaje transitrón.

1	Rejilla supresora.	V	Válvula EF 9
2	Cátodo.	A_1	Miliamperímetro de cc. de 0-10 mA
3	Rejilla pantalla.	A_2	Miliamperímetro de cc. de 0-10 mA
4	Placa.	A_3	Miliamperímetro de cc. de 0-1 mA
5	Rejilla de mando.	V_1	Voltímetro de cc. de 0-150 V

Parámetros:

Tensión de filamento $V_f = 5,^5$ V
Tensión de placa $E_a = 130$ V
Tensión de rejilla pantalla $E_p = 130$ V
Tensión de rejilla de mando $E_m = -3$ V

condensador, lo que facilita la interconexión de circuitos oscilantes y permite a este oscilador cubrir amplios márgenes de frecuencia. Esta ventaja ha contribuído a extender su uso como oscilador propio en aparatos de medida.

GENERACION DE OSCILACIONES COMPLEJAS

a) *Fundamentos del método.*—Para la producción de ondas complejas por medio del oscilador transitrón es necesaria, conforme apuntábamos anteriormente, la introducción de un nuevo circuito que modifique las condiciones de funcionamiento del oscilador de alta frecuencia. En la producción de ondas de impulsos es muy

conveniente que tal oscilador sea del tipo de relajación, que puede dar un tiempo de producción de oscilación portadora muy corto en cada impulso, como conviene en esta clase de ondas.

b) *Oscilación de relajación en el circuito de placa.*—En un principio se procuró que el circuito de relajación estuviese situado en la conexión de placa del pentodo oscilador, de acuerdo con la indicación hecha en la introducción, de utilizar los electrodos a tensión continua como modificadores de las condiciones de oscilación. El dispositivo empleado, cuyo proceso de funcionamiento exponemos a continuación, puede verse esquematizado en la figura 3.

En la característica de placa de la figura 4, obtenidas con el esquema de la figura 3, se observa que, manteniendo la rejilla supresora a un potencial bajo, toda la corriente catódica es prácticamente absorbida por la rejilla pantalla ; sin embargo, si en estas condiciones se aumenta la tensión de placa, puede llegarse a provocar el régimen de oscilación, aun a tensiones muy negativas de supresora. Durante la oscilación aumenta mucho la corriente de placa, ya que en este estado la corriente catódica media se divide aproximadamente por igual entre la placa y la rejilla pantalla.

Esto supuesto, supongamos que se conectan simultáneamente las tensiones electródicas de la válvula de la figura 7 estando ya encendido su filamento. El condensador C_3 comienza a cargarse a través de la resistencia R_3, pero cuando la tensión de placa llega a la necesaria para admitir la oscilación, ésta comienza, haciendo subir bruscamente el número de electrones que llegan a la placa y que descargan el condensador C_3, provocando nuevamente la caída de la tensión de placa y cortando con ello la oscilación. Nuevamente se carga la placa a través de R_2, para recomenzar el ciclo. La tensión de relajación aparece entre A y B. La frecuencia de la onda de relajación viene dada por los valores de C_3 y R_3 ; y, por último, el revelador que realiza el cortocircuito en los osciladores de relajación (generalmente una válvula de descarga de gas neon), queda sustituída por el mismo pentodo, siendo su entrada en oscilación el fenómeno que cortocircuita A con tierra, provocando el descenso de la tensión de relajación.

El fenómeno puede suceder también en sentido inverso. Imaginémonos que, conectada previamente una alta tensión a la placa, se suministra tensión a los demás electrodos. Al ser la tensión de placa muy superior, la casi totalidad de la corriente afluye a ésta,

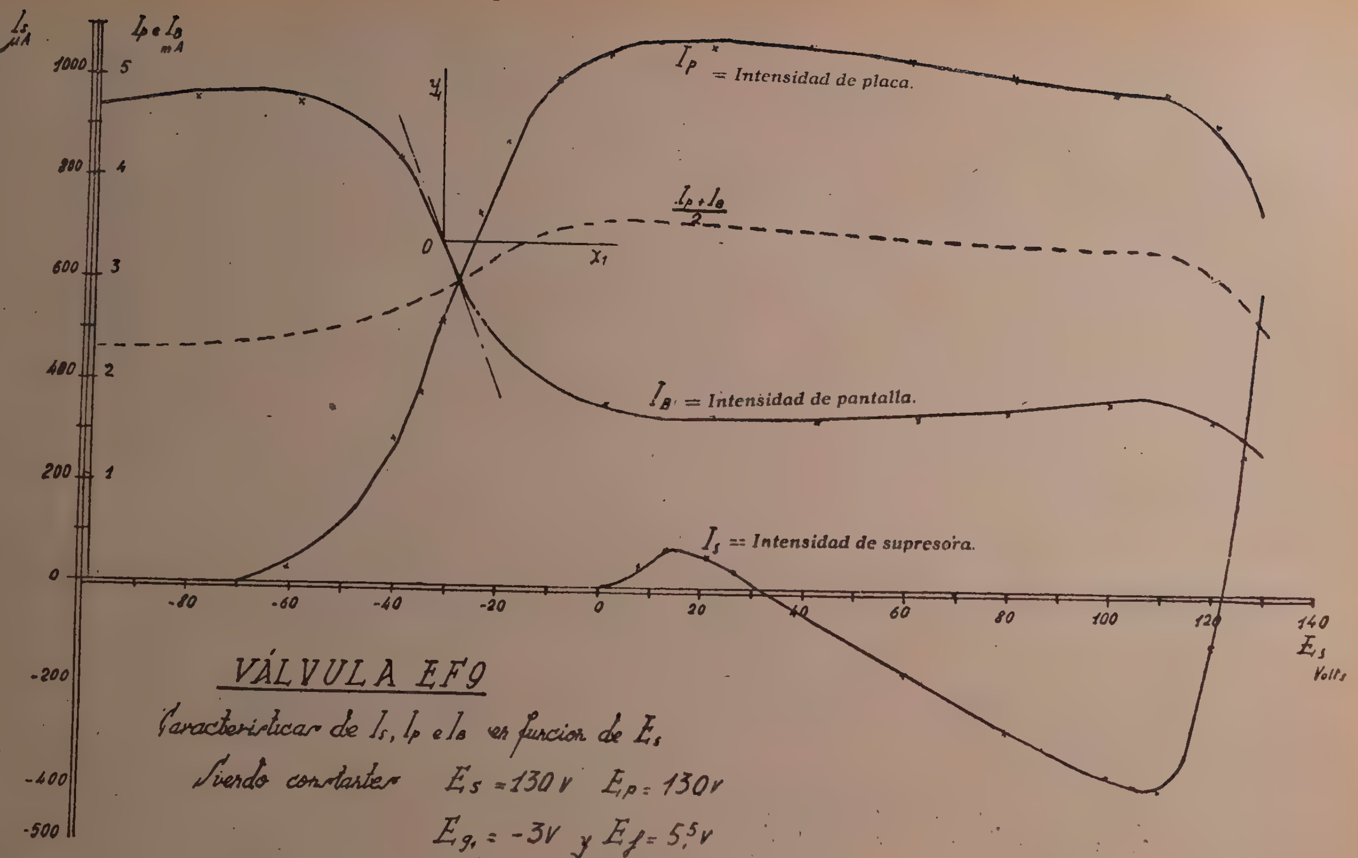


Figura 4

Características estáticas de un pentodo en conexión transitrón.

descargando el condensador C_3 hasta que la tensión alcanza un valor tal que pueda provocar la oscilación. Cuando ésta se produce, la intensidad de placa queda muy reducida, y el condensador se carga nuevamente a través de la resistencia R_3, ascendiendo la tensión de placa hasta cortar la oscilación, encontrándonos nuevamente en las condiciones iniciales, a partir de las cuales se repite el ciclo.

Aunque el fenómeno descrito no es conveniente para su utilización en funcionamiento continuo por las razones que luego expon-

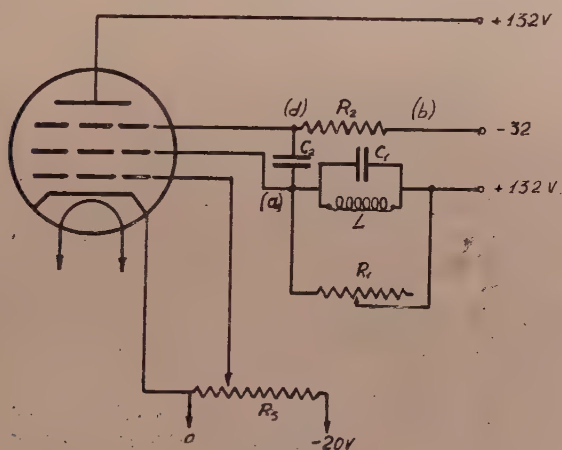


Figura 5
Esquema del oscilador transitrón.

dremos, describiremos brevemente el cálculo que nos llevó a abandonarlo, pues su estudio nos condujo al esquema definitivamente empleado, más sencillo y libre de los inconvenientes que presenta el sistema utilizado primeramente.

La característica: Intensidad en función de la tensión, en la resistencia placa cátodo del circuito descrito, es semejante a la de una válvula neon. En la figura 8 representamos una familia de características, utilizando la tensión de rejilla de mando como parámetro.

El fenómeno descrito puede verse claramente a la luz de estas curvas características.

La tensión de placa crece hasta D. En este punto se produce la

oscilación, que hace aumentar bruscamente la intensidad de placa, según la recta DA. Si en estas condiciones se disminuye la tensión de placa, la intensidad sigue la curva AB, tensión para la que se corta la oscilación, saltando bruscamente al punto C, de donde al aumentar la tensión se pasa a D para recomenzar el ciclo.

Tanto el aumento de la tensión de placa entre C y D, como la disminución entre A y B, se realizan en el oscilador automáticamente por medio del circuito CR. Pero su realización implica ciertas condiciones cuantitativas que deducimos a continuación.

Consideramos el circuito equivalente del de la figura 7, desde

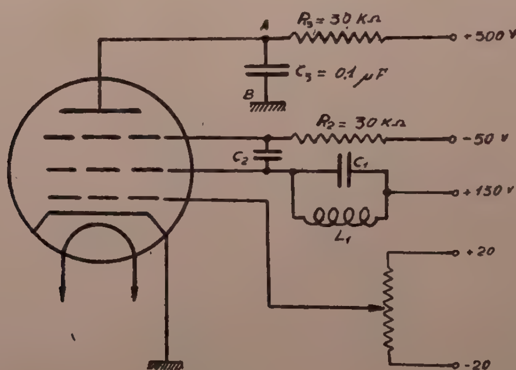


Figura 7

Transitrón generador de impulsos con circuitos de relajación en la placa.

este nuevo punto de vista. Este circuito, que representamos en la figura 9, consta de una resistencia, una capacidad y un órgano N de resistencia variable conectado en paralelo con aquélla.

Siendo V la tensión en bornes de N, se cumple evidentemente:

$$E = K(i_n + i_c) + v \qquad [3\text{-}1]$$

y como

$$i_c = C\frac{dv}{dt} \qquad [3\text{-}2]$$

se deduce:

$$E - R\,i_n - v = CR\frac{dv}{dt} \qquad [3\text{-}3]$$



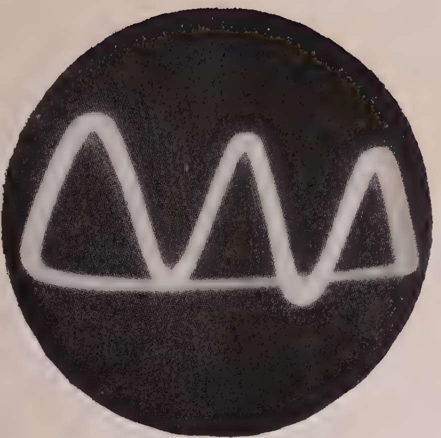


Figura 6

Oscilogramas obtenidos con el montaje esquematizado en la figura 5.

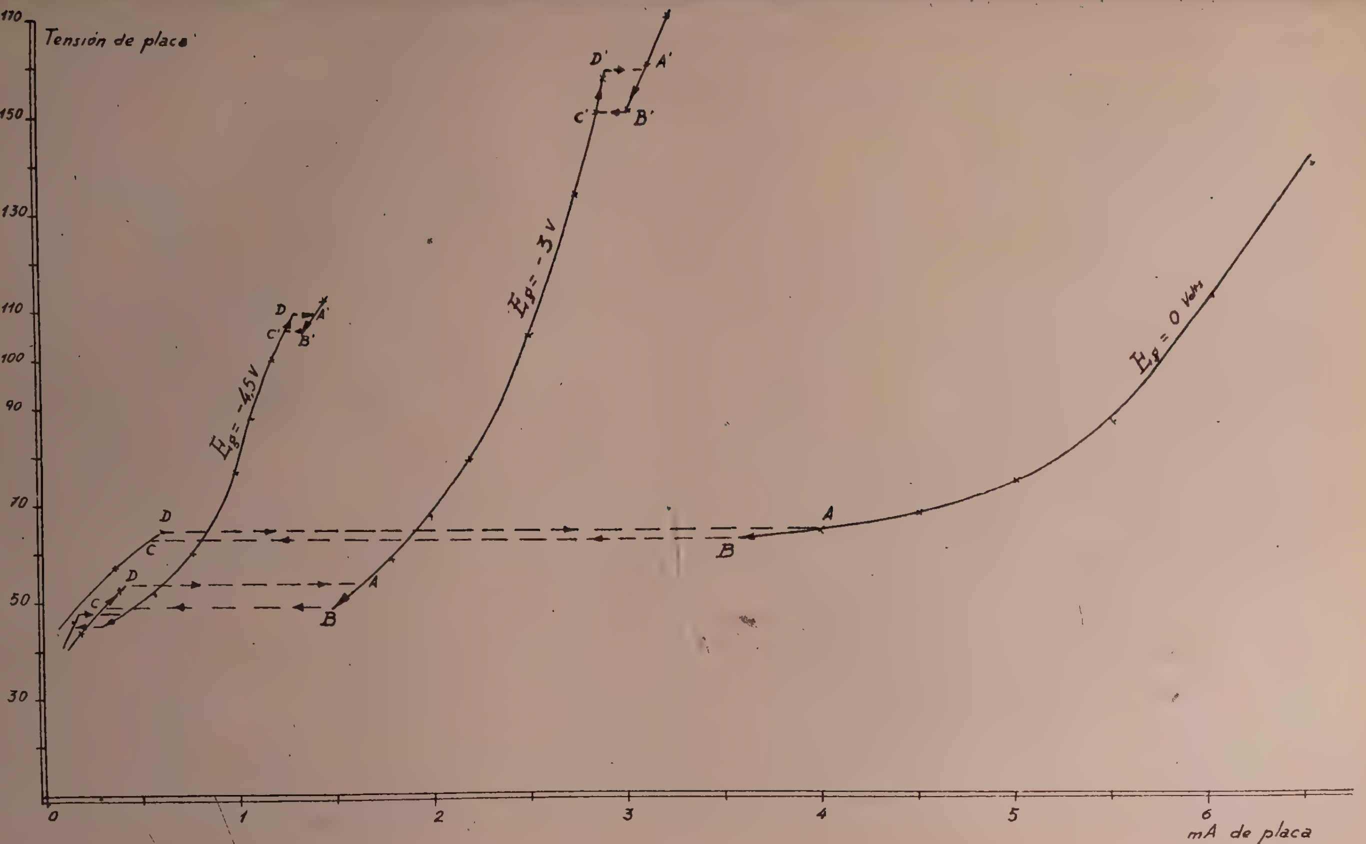


Figura 8

Tensión de placa en función de la intensidad de placa para distintos valores de E_g.

Una solución particular de esta ecuación es

$$\frac{dv}{dt} = v \qquad v = E - R\,i_n \qquad [3\text{-}4]$$

que corresponde a una posición de equilibrio. Físicamente signifi-

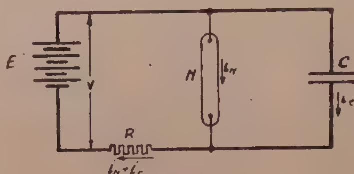


Figura 9
Esquema equivalente del circuito de relajación en placa.

ca que toda la intensidad que atraviesa R, pasa también por N, con lo que el condensador no se carga, permaneciendo su tensión constante y, con ella, la existente en bornes de N.

Que la solución [3-4] sea viable o no, depende de la estabilidad de la posición de equilibrio. La condición de estabilidad se cumple si para su incremento virtual de v, (∂v), $\frac{dv}{dt}$ resulta de signo contrario a él. Derivando la expresión [3-3] respecto a v obtenemos:

$$-K\left(R\frac{di_n}{dv} + 1\right) = CR\frac{d}{dv}\left(\frac{dv}{dt}\right) \qquad [3\text{-}5]$$

de donde resulta que $\frac{dv}{dt}$ es de signo contrario a dv y, por tanto, el equilibrio es estable, siempre que $\frac{di_n}{dv}$ sea negativo y su módulo cumpla:

$$\left|\frac{di_n}{dv}\right| > \frac{1}{R} \qquad [3\text{-}6]$$

o bien que

$$\left|\frac{dv}{dn}\right| < R \qquad [3\text{-}7]$$

pero el primer miembro de esta última expresión [3-7] es precisamente la derivada de la característica obtenida en el gráfico 14.

Luego si el punto de equilibrio cae sobre la parte ascendente de la característica, la posición es estable.

Con la ayuda de la misma característica, es posible determinar gráficamente la posición de equilibrio. Consideremos, en efecto, en la figura 10, la característica de la figura 8, correspondiente a la

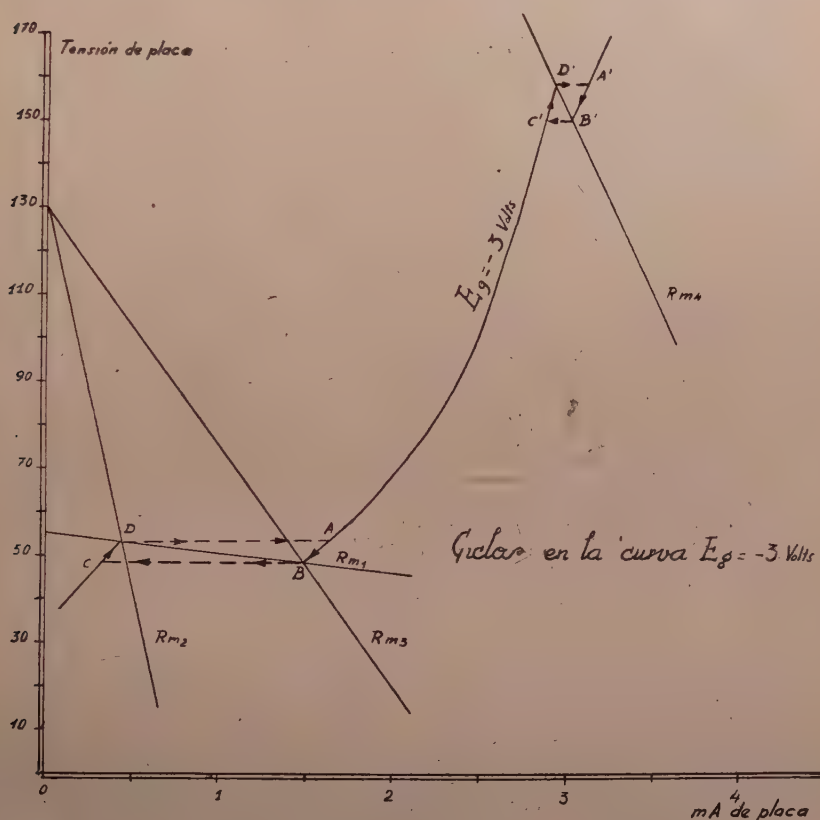


Figura 10

tensión normal de rejilla de mando $E_g = -3$ Volts. La ecuación definida por [3-4] es la de una recta que corta al eje $i_n = 0$ en E (tensión de alimentación), y cuyo coeficiente angular es

$$\frac{dv}{di_n} = \operatorname{tg} \alpha = -R \qquad [3\text{-}8]$$

Dibujada esta recta, la posición de equilibrio se encuentra en su intersección con la característica de la resistencia variable. De

acuerdo con las ecuaciones [3-5] y [3-6], si el punto de intersección corresponde a la rama ascendente de la característica, la posición es estable. Por el contrario, es suficiente que corte en la parte descendente, y que la tensión de alimentación E sea superior a D, para entrar en un régimen inestable que provoca automáticamente el recorrido del ciclo CD AB antes descrito.

Un fenómeno análogo se produce en la segunda discontinuidad de la curva, en la que se recorre el ciclo C'D' A'B'. La determinación de las tensiones y resistencias necesarias para provocar la producción automática de ciclos resulta ya sencilla a la vista de las consideraciones anteriores.

En cuanto a la forma de variación de la tensión de placa, así como la frecuencia con que se repite el ciclo, dependen del valor de C y de R, y excepto algunas particularidades debidas a la discontinuidad de la descarga (el condensador se descarga discontinuamente a cada cresta de onda de alta frecuencia), las propiedades del fenómeno son muy semejantes a los de la descarga de una válvula de neon en tantos escritos tratada. Tanto dichas particularidades como las de los oscilogramas recogidos son análogos a los observados en el circuito definitivo, en el que se tratan más extensamente estos extremos.

Considerando la figura 10 a la luz de los razonamientos expuestos, se observan, por ejemplo, en la curva $V_g = 3$ Volts., las dos zonas correspondientes a la oscilación de relajación con sus ciclos CD AB y C'D' A'B'.

La resistencia mínima en serie con la placa, necesaria para provocar la oscilación en el primer ciclo, es de 365 Ω, correspondiente a la recta R_m, que necesita una tensión de alimentación de 55 Volts. en placa. Este valor es muy crítico, y cualquier variación de la tensión de alimentación elimina la producción de la oscilación. Escogiendo un valor de tensión de alimentación de 130 Volts., igual al de la pantalla, resulta válida cualquier resistencia comprendida entre 181.000 Ω correspondientes a R_{m2} y 57.000 Ω que corresponden a la recta R_{m3}.

El inconveniente de este método de oscilación es que la pantalla recoge durante todo el tiempo que no oscila la válvula (que es casi la totalidad) la mayor parte de la corriente catódica, con lo que la intensidad que a ella rebasa la admisible normalmente, lo que in-

fluye desfavorablemente en la vida de la válvula haciendo poco recomendable este montaje.

En cuanto a la oscilación provocada en el ciclo C'D' A'B' exige una resistencia mínima de 200.000 Ω que supone una tensión de alimentación mínima en placa de 750 Volt. que exigiría en un montaje práctico el empleo de una válvula rectificadora especial, o una gran cantidad de pilas secas. No proporciona ninguna ventaja con respecto al circuito de relajación en rejilla supresora, que fué el definitivamente empleado y cuyas características detallamos seguidamente.

Las curvas correspondientes a tensiones inferiores de rejilla (F_g=—4,5 V.) producen una potencia de oscilación demasiado baja, y las superiores exigen cantidades catódicas exageradas, hasta el extremo de que no fué posible determinar ni estáticamente el segundo ciclo, en la curva correspondiente a $E_g=0$ Volts.

c) *Circuito de relajación en rejilla supresora.*—No es necesario recurrir a circuitos auxiliares en el oscilador transitrón para provocar la oscilación moduladora. En el mismo oscilador se dispone ya de un circuito resistencia-capacidad que puede, en ciertas circunstancias, oscilar en relajación. Nos referimos al circuito de acoplamiento ($R_2 C_2$ de la figura 5), que además de cumplir su misión de realimentación de la rejilla supresora, es susceptible de ser utilizado como modificador de la oscilación de alta frecuencia.

El interruptor automático necesario en el circuito está constituído en este caso por la misma rejilla supresora, y su funcionamiento se debe a la propiedad expuesta en la figura 4, que tiene este electrodo de absorber electrones procedentes del cátodo, cuando su potencial en positivo con respecto a aquél. No quiere decir esto que sea preciso trabajar con tensiones de polarización positivas en rejilla supresora, sino que, al establecerse la oscilación de alta frecuencia, la tensión instantánea en ella puede llegar a ser positiva en las crestas de onda, como suma de la tensión de polarización y la tensión comunicada por el circuito oscilante a la supresora a través del condensador de acomplamiento; esta tensión en el caso de ser K=1 alcanza el mismo valor que la de oscilación.

Este fenómeno determina la marcha de la intensidad media de rejilla supresora en función de la tensión base de dicho electrodo. Para obtener las gráficas correspondientes, se ha utilizado el esquema indicado en la figura 11, que es el del oscilador transitrón, con la tensión base de supresora variable continuamente,

y en el que se ha utilizado la resistencia de acoplo mínima compatible con la condición $K \simeq 1$ (dentro de un error modular inferior a 1 ‰), con dos objetos: *a*) para evitar la producción de hipos, y *b*) con el fin de disminuir en lo posible la diferencia entre el valor medido por el voltímetro V_2 y el real en la propia rejilla, muy difícil de medir sin influir en las características del acoplamiento pantalla-supresora. El error cometido para las intensidades de entrada en oscilación del orden de 25 μA, llega a ser de:

$$25 \cdot 30 \cdot 10^{-3} = 0{,}75 \text{ Volts.}$$

Esta diferencia es perfectamente calculable en cada momento.

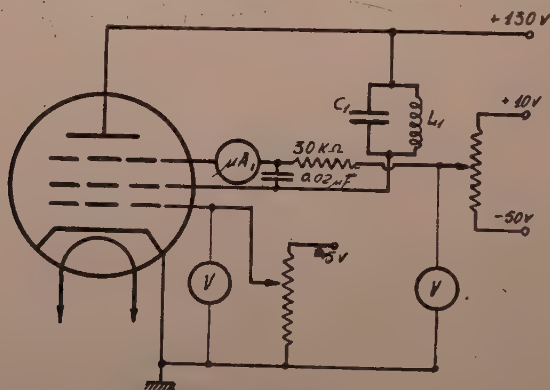


Figura 11

Esquema de obtención de las características de la figura 18.

Hemos preferido, sin embargo, referir las curvas a las tensiones medidas con el voltímetro por ser éstas las reproducibles experimentalmente, y no tener este error influencia en la teoría que desarrollamos.

En las gráficas resultantes interviene el fenómeno de emisión secundaria, que provoca la aparentemente caprichosa marcha de la intensidad de rejilla supresora en función de su propia tensión, indicada en el gráfico 4. Este fenómeno se hace sensible cuando las tensiones de cresta de la rejilla supresora sobrepasan los 16 voltios positivos, y provoca una disminución de la corriente, media absorbida por ella. Para tensiones de rejilla de mando muy bajas, que provocan oscilaciones de alta frecuencia de amplitud extraordinaria, resulta tan marcado el fenómeno que la corriente media de supresora llega a cambiar de signo, a consecuencia de que la intensidad cedida durante la parte de ciclo en que predomina la

emisión secundaria es superior a la absorbida mientras la rejilla supresora está a potencial comprendido entre 0 y +16 Volts.

Consecuencia de ello es la diferente forma de las curvas: I_{sup} en función de su propia tensión base, al variar la tensión de rejilla de mando, utilizada como parámetro. Esta variación se destaca ampliamente en el gráfico 12, cuyo significado damos a continuación.

Curva núm. 1.

Tensión de rejilla de mando =—4 Volts.

Al variar la tensión de rejilla supresora desde —40 Volts. se observa la entrada en oscilación para —31,5 Volts., dejando de oscilar a —27,6 Volts. sin apreciarse en ningún momento paso de corriente a través de la rejilla supresora.

Curva núm. 2.

Tensión de rejilla de mando —3 Volts.

Comienza la oscilación para E_s=—33 Volts., manteniendo, sin embargo, nula la intensidad de supresora, hasta llegar a —21 Volts., tensión para la que comienza la intensidad de supresora (más tarde veremos que este cambio significa al pasar del funcionamiento según el diagrama I, al diagrama II). La intensidad de supresora crece hasta el punto N (E_{sup}=14,4 Volts.) en que comienza a disminuir, junto con la amplitud de la oscilación hasta extinguirse súbitamente ambas para E_{sup}=—12,8 Volts. (punto I).

Al variar la tensión de supresora en sentido inverso, se recorre nuevamente la curva, pero no comenzando la oscilación en I, sino en N'. Estamos, pues, en presencia de un ciclo cerrado que, a semejanza del descrito al tratar de la modulación por circuito de placa, puede provocar automáticamente la oscilación de relajación moduladora, siempre que se dé un valor conveniente a la resistencia de de acoplo.

Desgraciadamente tal ciclo exige una resistencia de característica negativa—por ejemplo la R_{n3}—para que al entrar en oscilación la válvula y absorber electrones la rejilla supresora, ésta se hiciese más positiva en lugar de más negativa. El automatismo en los ciclos ha de conseguirse en las condiciones que describiremos al tratar de las curvas siguientes.

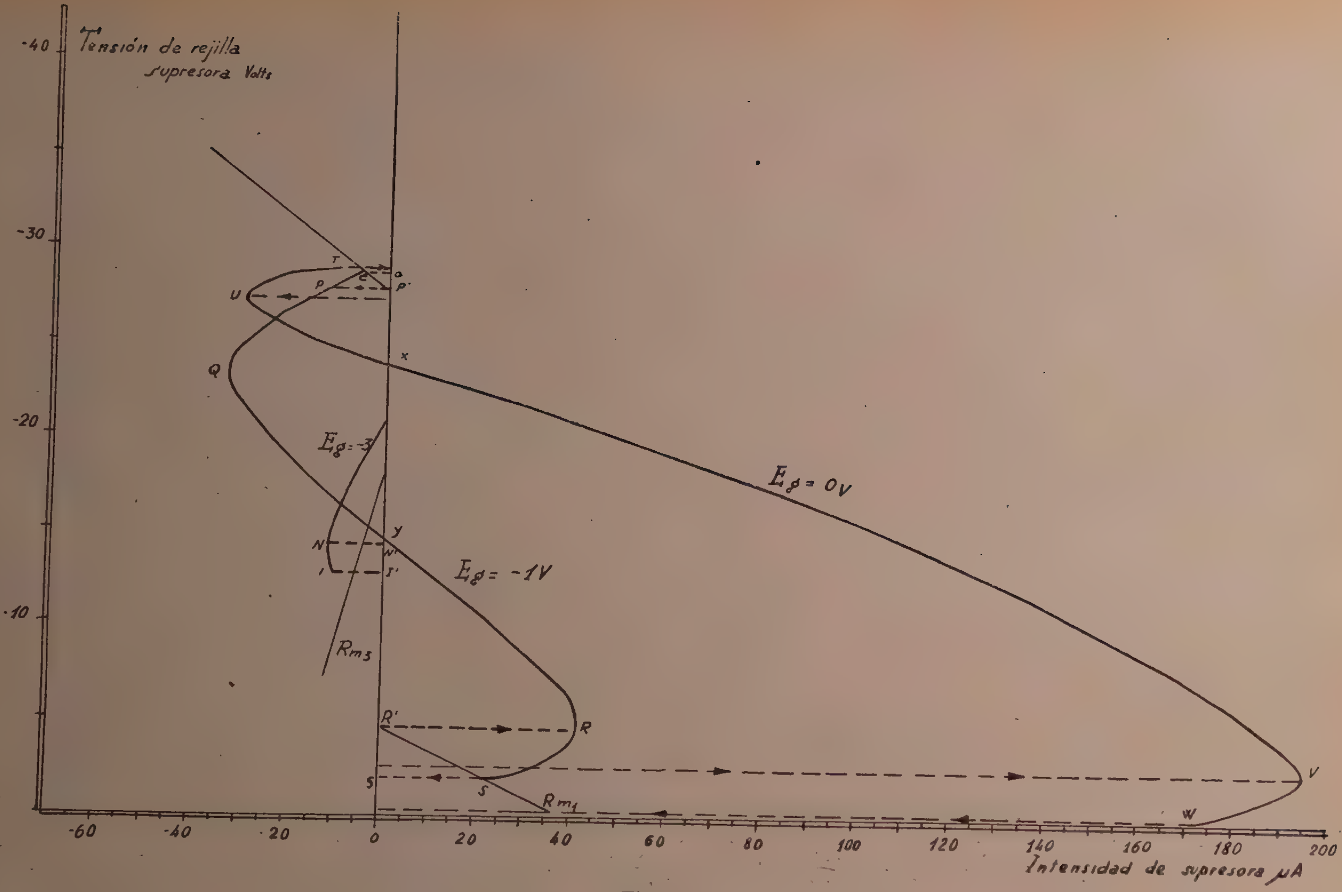


Figura 12

Tensión de rejilla supresora en función la intensidad de supresora para distintos valores de la tensión de rejilla de mando.

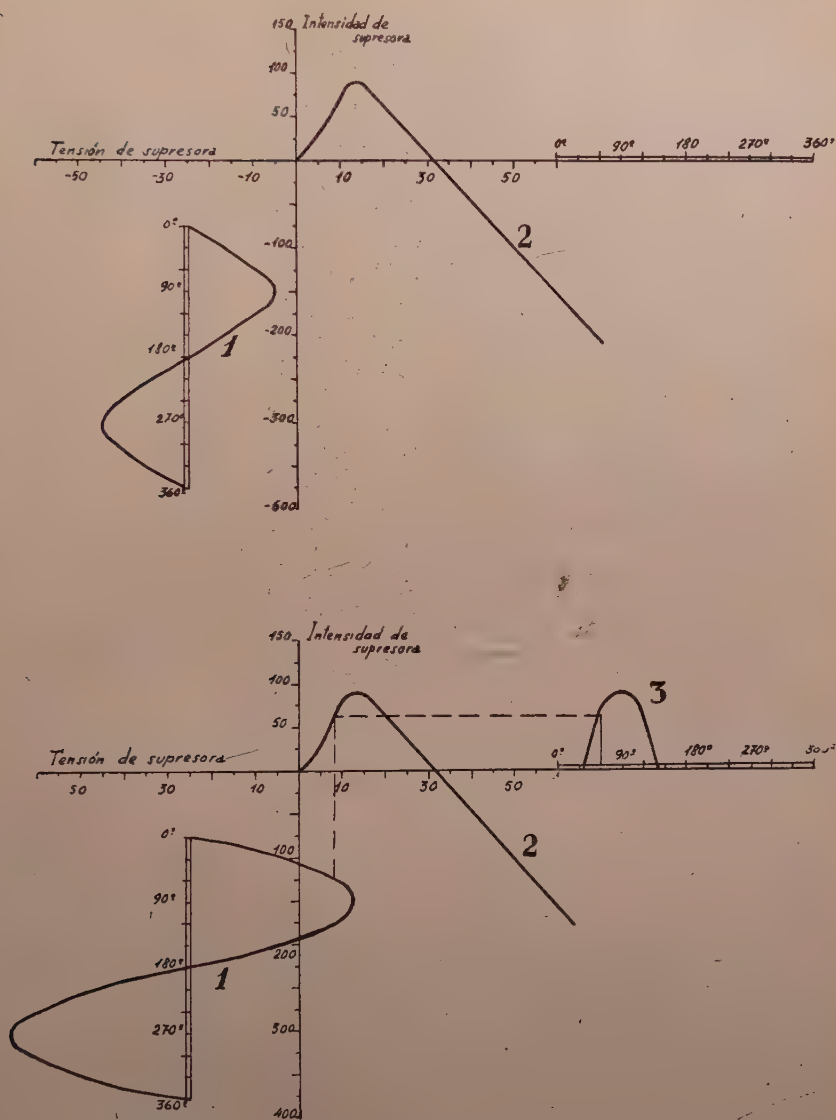


Figura 13 (I) y (II)

1—Tensión de supresora (introducida del circuito oscilante a través del condensador de acoplamiento).

2—Característica estática de rejilla supresora.

3—Forma de onda de la intensidad de supresora en régimen de oscilación.

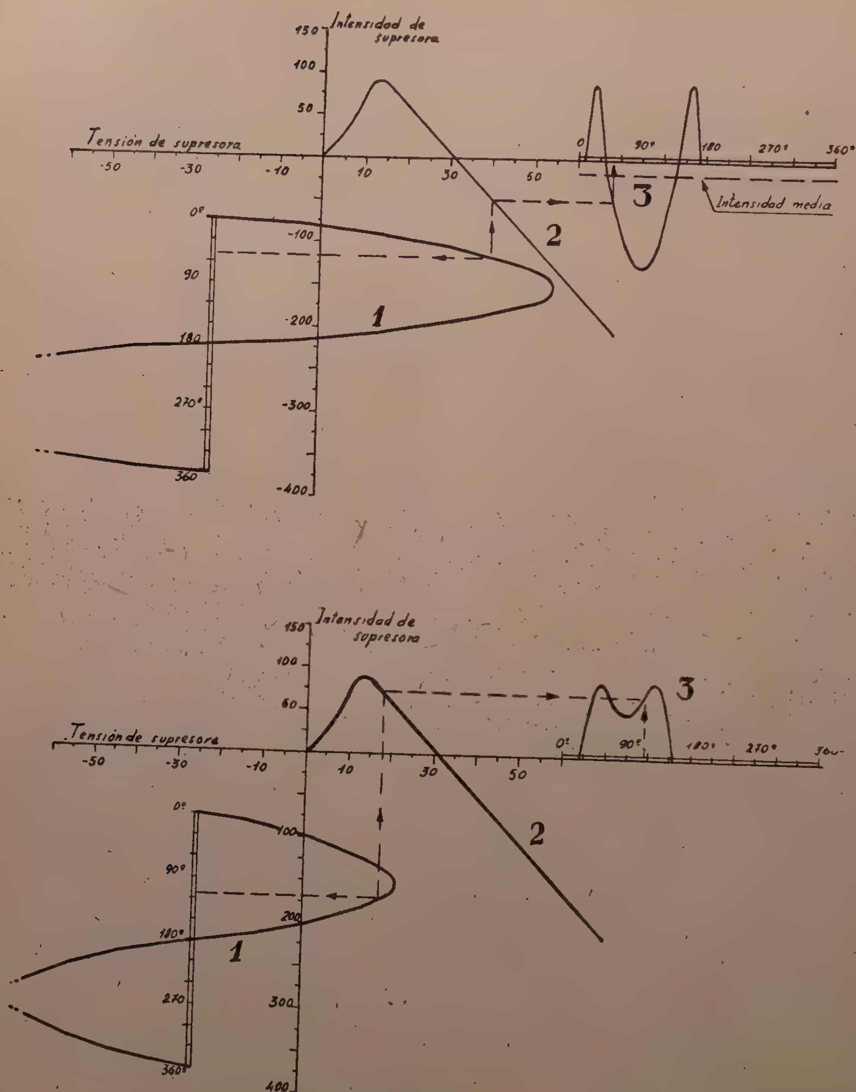


Figura 13 (III) y (IV)

1—Tensión de supresora (introducida del circuito oscilante a través del condensador de acoplamiento).

2—Característica estática de rejilla supresora.

3—Forma de onda de la intensidad de supresora en régimen de oscilación.

Curva núm. 3.

$E_m = -1$ Volts.

La oscilación comienza en P', para $E_{sup} = +28$, saltando automáticamente la intensidad de supresora a un valor de 9 μA. Este valor aumenta hasta su máximo para el punto O, donde empieza a disminuir debido al fenómeno de emisión secundaria que se describe en los diagramas a continuación, para anularse en Y, pasar por un máximo negativo en R y disminuir para extinguirse en S junto con la oscilación.

Al proceder en sentido contrario, comienza la oscilación en R' con lo que se tiene un ciclo. Asimismo existe otro ciclo para el extremo superior de la surva en OP'P.

Ambos son susceptibles de provocar oscilación automática, el inferior (R'RSS') para resistencias superiores a 100.000 Ω y tensiones de polarización más negativas de 4,5 Volts. (R_{m1}) y el segundo para resistencias de 325.000 Ω y tensiones de polarización más positivas de —28 Volts.

El ciclo inferior admite, con una resistencia de acoplo (que es la que provoca al mismo tiempo la oscilación de relajación) de 1 M Ω una variación de tensión de polarización entre —4,5 y —80 Voltios, lo que hace muy poco crítica la obtención de oscilaciones complejas. Además produce una amplitud de oscilación elevada. Admite condensadores de acoplo pequeños, permite variar entre amplios límites la cadencia de los impulsos y, por último, hace que durante el tiempo de no oscilación, sea la placa el electrodo colector de corriente, con lo que se descarga la rejilla pantalla, que es el más débil.

3.° También se ha dibujado la curva correspondiente a la rejilla de mando unida al cátodo (0 Volts.).

Presenta las mismas características que la curva anterior, pero con intensidades más exageradas, por lo que las tensiones adoptadas en la obtención de oscilogramas fueron las descritas en la curva anterior, de acuerdo con el esquema que daremos al describir el aparato empleado y los resultados obtenidos.

Los fenómenos expuestos son susceptibles de aclaración según diagramas correspondientes a cada uno de los casos en que se encuentra la ocilación. Estos casos pueden reducirse a tres:

1.° La oscilación no llega a hacer positiva en ningún momento

la rejilla supresora. En este caso, que corresponde al diagrama número 1 de la figura 13, y que se verifica a lo largo del segmento LM de la curva correspondiente a —3 Volts. y de toda la curva a —4 Volts., no se provoca corriente alguna a través de la rejilla supresora.

2.° La oscilación hace positiva en las crestas la tensión de supresora, pero sin llegar a provocar la emisión secundaria. Corresponde a los segmentos MN de la curva (—3 Volts.) OQ de la correspondiente a (—1) y TV de la curva (0 Volts.).

Su diagrama típico queda representado en el gráfico 13-II, donde se representa también la forma de onda de la intensidad de rejilla supresora a lo largo del ciclo.

La construcción seguida ha sido:

a) Representar la sinusoide de la tensión de supresora (curva 1).

b) Representar la curva: Intensidad de supresora, en función de tensión supresora (curva 2).

c) Elevar las ordenadas de la primera curva a la segunda en la forma punteada en el gráfico, para obtener la forma de onda de la intensidad de supresora (curva 3).

3.° Las crestas hacen entrar a la supresora en la zona de emisión secundaria.

Corresponde a las zonas QR de la curva (—1 Volts.) y UV de

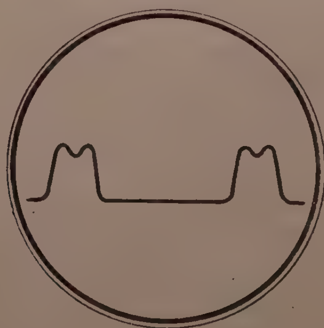


Figura 14

Tensión entre bornes del microamperímetro de supresora.

la curva (0 Volts.). Su diagrama típico se representa en el gráfico 13-III, donde se ve que la intensidad media puede llegar a ser negativa, como de hecho lo es en los segmentos YR y XV, respectivamente.

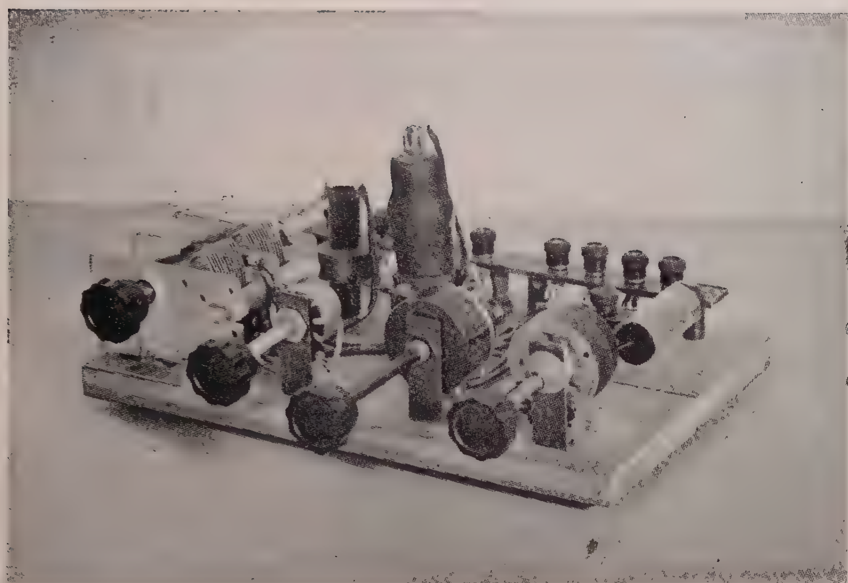


Figura 15

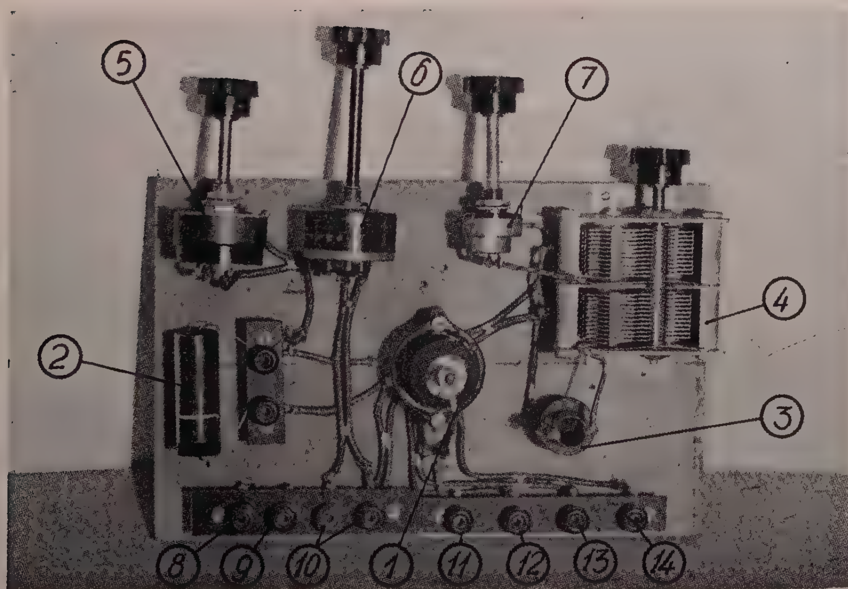


Figura 16

El diagrama dibujado corresponde a una amplitud muy exagerada de la tensión de oscilación (80 Volts.) irrealizable prácticamente ; se ha representado para dar una idea de la forma de onda. Correspondiente a este mismo caso dibujamos en el diagrama 13-IV un diagrama menos exagerado, correspondiente a unas condiciones en las que se obtuvo el oscilograma representado en la figura 14 (*).

En resumen : Se ha obtenido la producción automática en el mismo circuito oscilador transitrón, de un ciclo que modifica periódicamente las condiciones de oscilación de alta frecuencia. Para obtener este ciclo se ha utilizado el propio circuito de acoplamiento, aprovechando el fenómeno de absorción de electrones por la rejilla supresora a bajo potencial positivo, y su emisión por el mismo electrodo a potencial superior a 16 Volts.

En el párrafo siguiente describimos los aparatos empleados, las condiciones de experimentación y los resultados obtenidos.

d) *Circuito experimental.*—Siguiendo las consideraciones anteriores, se construyó el oscilador transitrón con oscilación auto-

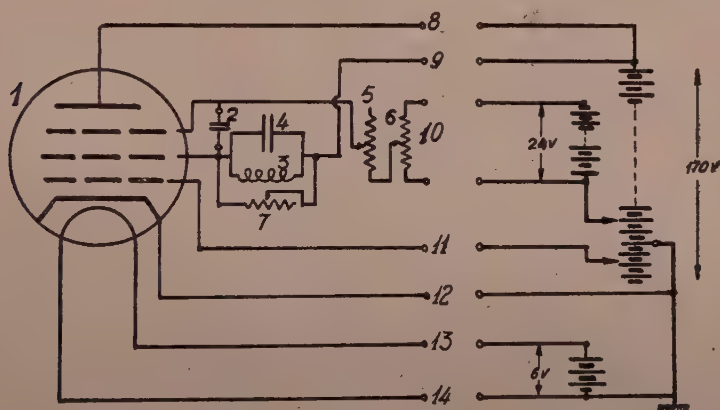


Figura 17

Esquema y notación correspondiente a las figuras 21 y 22.

modulada, cuya fotografía se muestra en la figura 15. La fotografía correspondiente a la figura 16 muestra el mismo oscilador visto

(*) Este oscilograma, obtenido conectando las placas de tubo de rayos catódicos a los bornes del microamperímetro del esquema de la figura 17, se dibujó calcando sobre curva fija en la pantalla, por no disponer de máquina fotográfica en el momento de la experiencia.

en planta, y sobre ella se señalan los números a que nos referimos al describir sus distintos elementos constitutivos.

El esquema del dispositivo empleado, aunque muy semejante a los utilizados a lo largo de todo el trabajo, se encuentra representado en la figura 17, coincidiendo los números de sus componentes con los de la fotografía 16 a los que se hace referencia en el texto.

Núm. 1.—Válvula EF 9, usada a lo largo del presente trabajo.

Núm. 2.—Condensador de acoplo. Se dispusieron los contactos móviles que se ven en la fotografía para poder cambiar fácilmente los condensadores de acoplo, obteniendo distintas frecuencias para la oscilación de relajación.

Núm. 3.—Bobina de autoinducción que forma parte del circuito oscilante de alta frecuencia.

Núm. 4.—Condensador variable, que constituye, con la bobina núm. 3, el circuito oscilante.

Núm. 5.—Resistencia variable de acoplamiento. Se utilizó un potenciómetro de 1 M Ω de valor máximo. Todos los oscilogramas se obtuvieron con este valor que, de acuerdo con lo expuesto en el párrafo *c*) da gran flexibilidad a la producción de ciclos.

Núm. 6.—Potenciómetro de variación de tensión base de rejilla supresora. Para evitar que su resistencia interna influyese en las condiciones de oscilación, se ha empleado un potenciómetro bobinado de resistencia total de 235 Ω, despreciable al lado de la resistencia de acoplamiento.

Núm. 7.—Potenciómetro de carga del circuito oscilante. Su valor máximo es de 1 M Ω, estando provisto de un interruptor que abre el circuito. Nos permitió constatar que los hipos engendrados admiten cargas hasta de 50.000 Ω sin descender apreciablemente la amplitud de oscilación. Este resultado coincide con el que se deduce del examen de las ecuaciones de Van der Pol, en las que se ve que la disminución de amplitud es apreciable solamentee cuando la conductancia de pérdidas en el circuito oscilante es comparable con la resistencia interna de la válvula osciladora.

Núm. 8.—Contacto de alimentación en tensión de placa.

Núm. 9.—Contacto de pantalla.

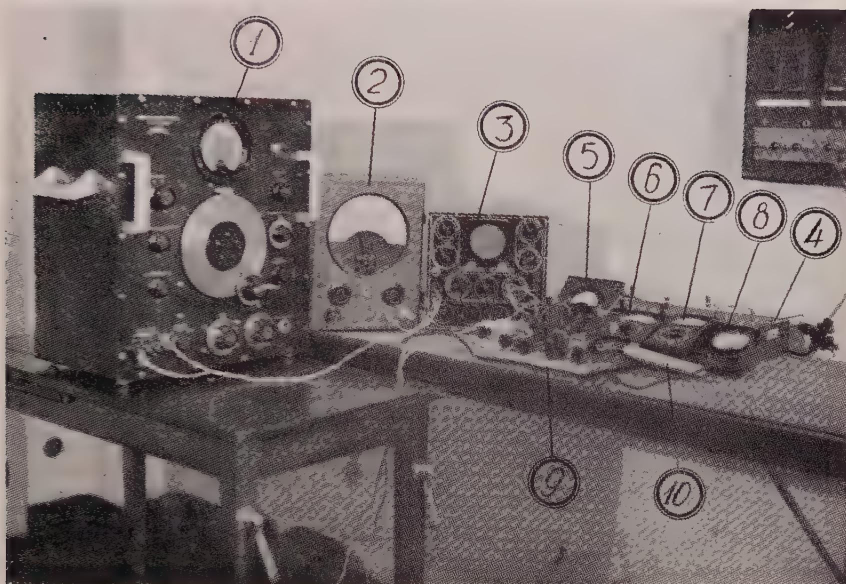


Figura 18

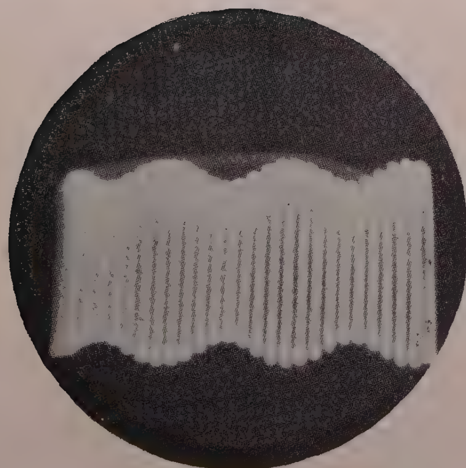


Figura 19

Núm. 10.—Extremos del potenciómetro de tensión de supresora.

Núm. 11.—Entrada de tensión a la rejilla de mando.

Núm. 12.—Conexión de cátodo.

Núm. 13 y 14.—Conexión de filamento.

Las tensiones de alimentación fueron dadas con una batería de pilas secas, no representadas en la figura, excepto las tensiones en 13, 14 y 10 para las que, en atención a su consumo se precisen baterías de acumuladores de 18 A-h. de capacidad. El conexionado general de alimentación se indica en la figura 23.

Todos los cables de conexión fueron blindados, y los blindajes reunidos conectados a cátodo para evitar influencia de campos externos. Las manchas blancas que se observan en los cables de la figura 16 son las soldaduras de estaño que unen los blindajes exteriores entre sí.

Los aparatos de medida se introdujeron donde eran necesarias sus indicaciones, separando el cable y empleando conexiones blindadas y lo más cortas posibles. Estas precauciones pueden considerarse más que suficientes, pues a la frecuencia empleada, muy poco superior al límite audible, no son muy de temer los efectos de capacidades parásitas.

En cuanto a los aparatos empleados en el curso de la experimentación, se encuentran fotografiados en conjunto en la figura 18.

c) *Oscilogramas.*—Con los aparatos últimamente descritos se obtienen diversos tipos de modulación, correspondientes a distintas características de los ciclos recorridos, de los que recogemos como típicos de cada forma de modulación los oscilogramas que se exponen.

En los oscilogramas en que no se indique lo contrario, la tensión introducida entre las placas de deflexión vertical del tubo de rayos catódicos corresponde a la existente en los extremos del circuito oscilante de alta frecuencia. La deflexión horizontal del punto luminoso está producida por el oscilador «diente de sierra», incluído en el oscilógrafo como «base de tiempos».

Todos ellos fueron obtenidos con una resistencia de acoplo de rejilla supresora de 1 M Ω, una tensión común a la placa y pantalla de 130 Volts. y una tensión en rejilla de mando de —2 Volts.

De ellos se desprende que la capacidad de acoplo actúa, no solamente sobre la cadencia de la onda de sobremodulación sino sobre las características de ésta, obteniéndose la modulación casi sinusoidal para capacidades de acoplo muy pequeñas, y agudizándose tanto más la modulación al aumentar dicha capacidad.

Iremos, pues, exponiendo esta gama de formas de modulación aumentando la capacidad de acoplo y pasando mediante ello de un tipo de modulación a otro. Sólo nos detendremos para exponer aquellos oscilogramas en los que las características sean bien claras. Es de observar que para la misma capacidad de acoplamiento, pueden obtenerse diversos tipos de oscilación, aunque en los oscilogramas expuestos nos refiramos a aquellos tipos de oscilación correspondientes a la capacidad para la que su obtención es menos crítica.

Por último, las tensiones de rejilla supresora que se indican correspondientes a cada oscilograma corresponden a tensiones de alimentación base que, como se ha advertido, no corresponden a la verdadera tensión en la supresora, imposible de medir sin modificar las características del acoplamiento, al introducir una autoinducción (la de la bobina móvil del voltímetro), en paralelo con la resistencia de acoplo.

Exponemos, pues, los siguientes oscilogramas correspondientes a:

1.° Oscilación modulada sinusoidalmente, obtenida con $E_s = -4{,}5$ Volts., C acoplo = 300 μμF, representada en la figura 19.

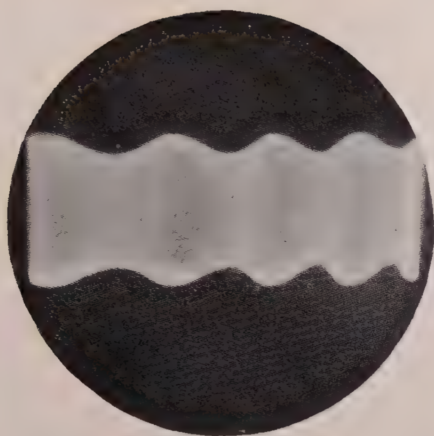
2.° Oscilación modulada en relajación. Se presentan cuatro tipos característicos de esta oscilación:

I. Modulación en relajación poco profunda.
Oscilograma *a*) de la figura 20.

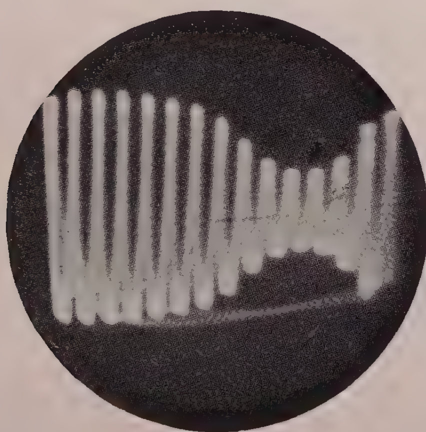
II. Modulación en relajación al 50°.
Oscilogramas *b*) y *c*) de la figura 20. Responden ambos a idéntico fenómeno, pero se ha variado la base de tiempos del oscilógrafo con el fin de observar en el segundo la descomposición de la envolvente en las distintas ondas sinusoidales.

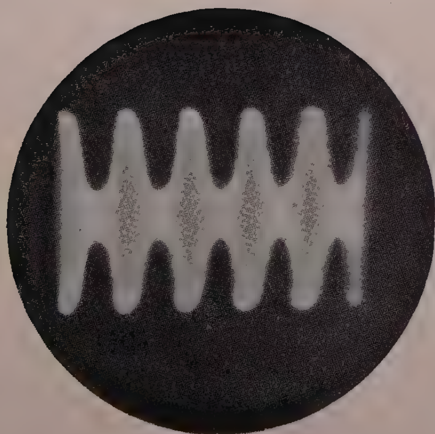
III. Modulación muy profunda. Oscilograma *d*) de la figura 20.

IV. Sobremodulación. Corresponde al oscilograma *e*) la misma figura. Reproduce el fenómeno de una sobremodulación muy acentuada.


a)


b)


c)


d)

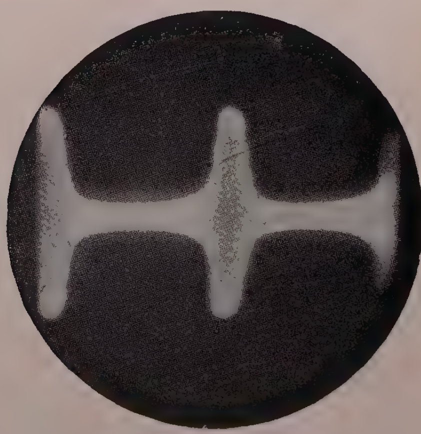

e)

Figura 20

Todos los oscilogramas se obtuvieron con una capacidad de acoplo de 1.000 μμF, aumentando la tensión base de rejilla supresora a partir de —20 Volts.

En la figura 19 *c*) puede determinarse la frecuencia de la onda moduladora de relajación que es 15 veces inferior a la frecuencia fundamental y a que en cada ciclo se observan 15 ondas. Al ser ésta de 19,5 Kc/s. resulta que la frecuencia de la oscilación moduladora es de 1,3 Kc/s.

Al aumentar la capacidad de acoplo se describen ya exactamente los ciclos estudiados en el párrafo anterior. Los fenómenos de modulación aparecidos al emplear pequeñas capacidades de acoplamiento, deben achacarse, pues, al hecho de no cumplirse en estas capacidades la condición supuesta a lo largo de nuestro trabajo: $K \simeq 1$.

Al verificarse esta última condición, los fenómenos son más netos y la envolvente de la onda de alta frecuencia se aproxima cada vez más a la onda rectangular de impulsos. Una serie que casi responde ya estas características, es la representada en la figura 21, correspondiente a una capacidad de acoplo de 3.000 μμF. Para esta capacidad no es posible la obtención de la modulación. Los hipos presentan el aspecto de sobremodulados para una tensión de rejilla supresora de —26 Volts. (oscilograma *a*). Al aumentar esta tensión, los hipos se espacían y afinan, respondiendo a un tiempo de descarga menor en el condensador de acoplo, al aumentar el tiempo de cresta de onda para el que la rejilla es positiva.

Así se obtiene el oscilograma *b*), en el que ya aparece claramente la onda de impulsos. En las mismas condiciones que este oscilograma se recogieron los *c*), *d*) y *e*) que prueban la hipótesis expuesta acerca de la producción de oscilaciones complejas.

En efecto: La fotografía *c*) recoge la tensión encontrada en los bornes del condensador de acoplamiento. Muestra la oscilación de relajación que, de acuerdo con nuestra hipótesis, debe verificarse el ciclo, y que resulta análoga a la figura observada en el oscilógrafo, de la forma de la onda de tensión en los bornes de una lámpara de descarga de gas, productora típica de tales oscilaciones.

El oscilograma *d*) muestra la misma curva de la figura anterior, estando la escala vertical ampliada. En ella se observa que la caída de la tensión en bornes del condensador no se verifica de

una manera continua, sino intermitentemente, como lo demuestra el punteado de la rama descendente. Esta discontinuidad queda aclarada, si recordamos que la descarga del condensador se verifica por saltos, correspondiendo cada uno de ellos a la cresta de *c*) da onda de alta frecuencia durante la que es positiva la rejilla supresora.

Y, por último, es oscilograma *e*) recoge la forma de la tensión en rejilla supresora, tomada entre ésta y tierra. Esta figura—fundamental para la aclaración de nuestra hipótesis—se compone de una oscilación de relajación, expuesta ne la figura *c*), en la que superpone, solamente durante las ramas descendentes, una oscilación de alta frecuencia. Esta oscilación es reflejo de la producida en el circuito oscilador, introducida en la rejilla supresora a través del condensador de acoplo y corresponde a los picos observados en las figura 27 *b*).

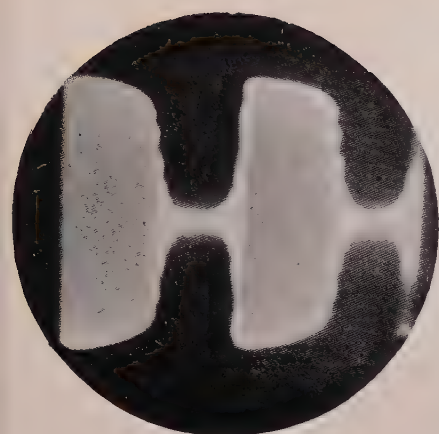
Al aumentar la capacidad de acoplo, se repiten estos fenómenos aun más lentamente; no obstante, los oscilogramas expuestos son ya típicos en las ondas de impulsos. La oscilación moduladora es cada vez más lenta, y la relación entre el tiempo de oscilación y el de carga del condensador es cada vez menor. El oscilograma de la figura 22, obtenido con una capacidad de acoplo de 10.000 μμF, es ya la onda de impulsos muy estrechos que estamos acostumbrados a ver en el «radar». Un impulso fino seguido de un «silencio» que dura todo el tiempo que tarda el rayo en recorrer la pantalla del tubo de Braun.

Al aumentar aun más la capacidad de acoplo se hace muy lenta la cadencia de la oscilación moduladora. El fenómeno deja de ser observable en el tubo de rayos catódicos, al no persistir la imagen desde una onda a otra, pasa, empero, a ser registrado por la aguja del microamperímetro de rejilla supresora.

En efecto, con una capacidad de 50.000 μμF ya se observa oscilar la aguja del microamperímetro. Con una capacidad de 0,5 μF se ve el fenómeno siguiente.

La aguja del microamperímetro está en el cero y en el oscilógrafo se observa una línea nítida (no hay tensión en las placas de deflexión vertical). Súbitamente el sistema entra en oscilación. En el oscilógrafo se ve deflexión vertical, y el microamperímetro indica el paso de corriente.

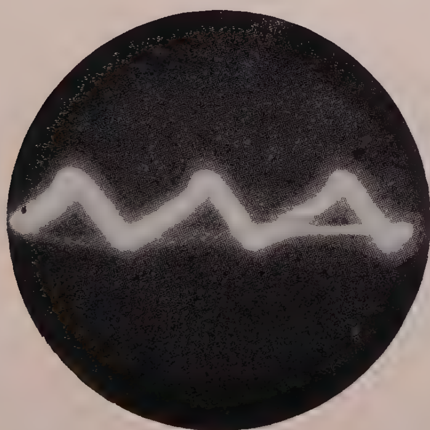
Este estado dura un quinto de segundo aproximadamente. Al cabo de él se extingue, tanto la oscilación como la indicación del



a)



b)



c)



d)



e)

Figura 21



Figura 22

microamperímetro. Todo queda sin oscilación hasta que al cabo de un minuto cinco segundos se repite el fenómeno. No cabe duda de que nos hallamos ante el fenómeno descrito anteriormente, y observado en los oscilogramas de la figura 21, que ahora se verifica mucho más lentamente.

La cadencia del fenómeno puede llegar a ser extremadamente pausada. Con capacidades de acoplo de 2 μF hemos obtenido períodos de 9 a 10 segundos. Estos períodos dependen naturalmente de la tensión de alimentación base de la pantalla, pues el ciclo comienza cuando la exponencial de carga del condensador corta a la recta que indica el comienzo de la oscilación.

BIBLIOGRAFIA

(1) BRUNETTI: Practical negative Resistance Oscillator. *Review of Scientific Instruments*. Vol. 10, págs. 83-85, año 1939, núm. 4.

(2) BRUNETTI: Transitron Oscillator. *Proceedings of the Institute of Radio Engineers*. Vol. 27, págs. 88-94, año 1939, núm. 2.

(3) *Radio Mentor*: Eine sehr praktische und einfache Messeinrichtung für Frequenzen, Selbsinducktionen und kleinen Kapacitäten. (Anónimo) páginas 331-64. Nov.-dic. 1943, núms. 11-12.

(4) *Radio Mentor*. Septiembre 1940. Núm. 9, pág. 343.

(5) CHAMBERS: *Radio Magazine*, 25 nov. 1943, núm. 204 (traducido de *Wireless World*).

(6) BRUNETTI: Characteristics of the Transitron Oscillator. *Communications*. Vol. 24, pág. 40, junio 1944, núm. 6.

(7) TILLMAN: A note on Electronic negative Resistors. *Wireless Engineers*. Vol. 22, pág. 27, enero 1945, núm. 256.

(8) F. E. WILLIAMS: Transitron Oscillator used as Signal Source and for Dynatron Resistance Measurements. *Wireless World*. Vol. 50, pág. 241, agosto 1944, núm. 6.

(9) A. C. LINCH AN J. R. TILLMAN: The principles and Desing of Valve Oscillators I. *Electronic Engineers*. Vol. 17, pág. 382, febrero 1945, número 204.

(10) E. WILLIAMS: Thermionic Valve Circuits. Pitman and Sons. London, 1944.

(11) BRUNETTI: Supply Voltage Effect on Transitron Perfomance Communication. Feb. 1945, vol. 25, págs. 60-64, núm. 2.

14 SOBRE LA PRODUCCION DE FUERZAS ELECTROMOTRICES POR CENTRIFUGACION DE ELECTROLITOS Y SU APLICACION A LA SEPARACION DE ISOTOPOS, *por* RICARDO SALCEDO.

SUMMARY

The author studies the possibility of producing electromotive forces by the centrifugation of electrolytes in a Supercentrifuge. He proves that these electromotive forces depend solely on the mass of the cathions existing in the electrolyte, subjected to the action of an intensive centrifuge field when centrifugation is carried put under specific conditions. He then consider the possibility of making good use of tjis property to obtain the separation of isotopes, specially, those of heavy metals, and explains some of the technical conditions which the Centrifuges must have to obtain this.

El objeto del presente trabajo es cxponer los fundamentos de un método para separar iones de masas diferentes, aprovechando la posible producción de fuerzas electromotrices de origen seudogravitatorio que se originarían al centrifugar un electrolito en una centrífuga especial a elevadas velocidades de rotación. En todos los cálculos se utiliza la hipótesis de que tanto los aniones como los cationes se comportan en el seno del disolvente como las moléculas de un gas perfecto y por lo tanto no se tiene en cuenta las acciones electrostáticas que se ejercen entre ellos. Realmente estas acciones existen, pero los resultados obtenidos al omitirlas parecen tener un grado de verosimilitud suficiente para considerar a todo lo expuesto como una primera aproximación a un posible conjunto de fenómenos que creemos deben ser verificados detenidamente desde un punto de vista experimental.

Consideremos que una centrífuga especial (fig. 1) en cuyo rotor existen dos anillos colectores análogos a los empleados en los alternadores. Estos anillos colectores están unidos eléctricamente a un juego de electrodos *a* y *b* que cada tubo de la centrífuga lleva en su interior. Esta unión eléctrica se produce en el momento en que la centrífuga animada de una cierta velocidad de rotación hace que sus tubos adquieran la posición horizontal.

En todo lo que sigue supondremos que los electrodos *a* y *b* están constituídos por el mismo metal y que el electrolito que llena el tubo contiene una disolución de los iones de este metal. Por consiguiente, los electrodos *a* y *b* son impolarizables y cuando la centrífuga está en reposo no existe entre ellos fuerza electromotriz alguna.

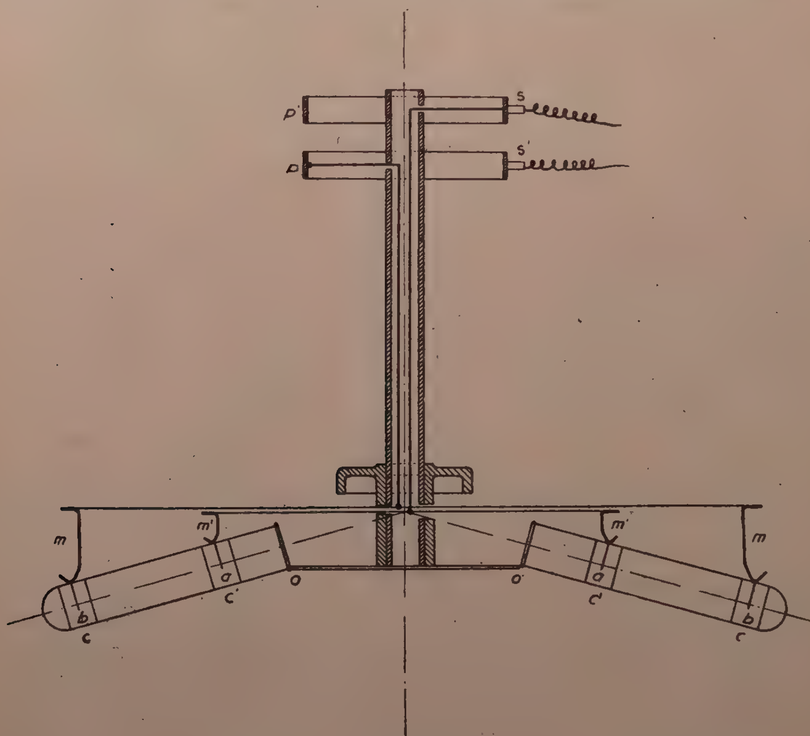


Figura 1

m y *m'* : muelles de contacto.
c y *c'* : anillos de contacto.
a y *b* : electrodos.
p y *p'* : anillos colectores.
o y *o'* : charnelas de giro.
s y *s'* : escobillas.

Imaginemos ahora que la centrífuga se pone en movimiento hasta alcanzar una velocidad angular constante ω. Es indudable que al cabo de cierto tiempo se producirá una distribución del electrolito a lo largo del tubo, en virtud de la cual sobre el electrodo *b* existe una concentración distinta de la que reina sobre el electrodo *a*.

Sabemos que cuando un metal está sumergido en una disolución de sus iones, el salto de potencial viene expresado por la fórmula de Nernst, y, por consiguiente, si llamamos C_a^+ a la concen-

tración de los cationes en la proximidad del electrodo a y C_b^+ a la misma concentración en las proximidades del electrodo b, la fuerza electromotriz, debida únicamente a esta diferencia de concentración, viene dada por la fórmula:

$$\beta = \frac{RT}{nF} \, l \, \frac{C_b^+}{C_a^+} \qquad C_b^+ > C_a^+ \qquad [1]$$

en donde n representa la valencia del catión considerado; R, la constante de los gases perfectos; T, la temperatura absoluta, y F, la carga del ión-gramo monovalente.

Los elementos activos que originan la fuerza electromotriz son en este caso los cationes y a ellos sólo nos referiremos en todo lo que sigue, despreciando, por el momento, las acciones electrostáticas entre ambas especies de iones.

Las concentraciones C_a^+ y C_b^+ están íntimamente ligadas a la

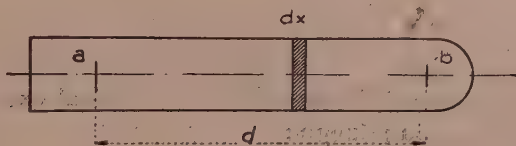


Figura 2

fuerza centrífuga y por lo tanto son funciones de la velocidad angular ω. Ahora bien, para obtener la expresión [1] en términos del campo centrífugo que se establece a lo largo del tubo, tenemos que calcular la distribución de la concentración de los cationes una vez que la centrífuga alcanza un régimen permanente de rotación. Si mantenemos la hipótesis de que éstos se comportan en el seno de la disolución como las partículas de un gas perfecto, podemos aplicarles un razonamiento análogo al empleado para obtener la fórmula hipsométrica.

Si llamamos π^+ a la presión osmótica producida por las partículas positivas, tendremos que en la sección practicada en el tubo a una distancia x del electrodo a, esta presión no será la misma que la que existe en la sección practicada a la distancia $x + dx$ (fig. 2).

Si llamamos $d\pi^+$ a este exceso de presión, veremos inmediatamente que es debida al arrastre de los cationes por la fuerza centrífuga que trata de acumularlos en el fondo del tubo. Esta fuerza pro-

duce a todo lo largo del mismo un campo seudo-gravitacional, cuya intensidad ε viene dada por la expresión:

$$\varepsilon = \omega^2 [r + x] \qquad [2]$$

siendo r la distancia de a al eje de rotación.

Si llamamos c^+ al número de cationes-gramo contenidos en un centímetro cúbico de disolución a la distancia x, la masa total contenida en un estrato de sección S y de espesor dx será:

$$\frac{c^+ \mathrm{MS}\, dx}{g} \qquad [3]$$

siendo M el peso atómico del catión y g la aceleración de la gravedad.

Sobre la masa [3] actúa la fuerza centrífuga de tal forma que en la sección practicada a la distancia $x + dx$ existe una fuerza

$$\frac{c^+ \mathrm{MS}\, dx}{g} \omega^2 [r + x] \qquad [4]$$

que referida a la unidad de superficie, equivale al exceso de la presión osmótica buscada; luego:

$$d\pi^+ = \frac{c^+ \mathrm{M}\, \omega^2 (r + x)\, dx}{g} \qquad [5]$$

pero según hemos supuesto:

$$\pi^+ = c^+ \mathrm{RT} \qquad [6]$$

y por consiguiente:

$$c^+ = \frac{\pi^+}{\mathrm{RT}}$$

Sustituyendo en [5] tendremos:

$$\frac{d\pi^+}{\pi} = \frac{\mathrm{M}\, \omega^2 (r + x)\, dx}{g\, \mathrm{RT}} \qquad [7]$$

o bien, como las presiones son proporcionales a las concentraciones

$$\frac{dc^+}{c^+} = \frac{\mathrm{M}\, \omega^2 (r + x)\, dx}{g\, \mathrm{RT}} \qquad [8]$$

y de aquí finalmente que:

$$RT\,l\,\frac{C_b^+}{C_a^+} = \frac{M\,\omega^2\left[rd + \frac{1}{2}d^2\right]}{g} \qquad [9]$$

siendo *d* la distancia entre los electrodos.

Si sustituímos en [1] el valor de $RT\,ln\,\frac{C_b^+}{C_a^+}$ deducido de [9], tendremos inmediatamente que:

$$\beta = \frac{M\,\omega^2\left[rd + \frac{d^2}{2}\right]}{gn\,F} \qquad [10]$$

Si dividimos el numerador y e el denominador del segundo miembro de la ecuación [10] por el número N de los cationes contenidos en el catión-gramo, y teniendo en cuenta que $\frac{M}{N} = m^+$ siendo m^+ la masa de un catión y $\frac{F}{N} = e$ siendo e la carga del electrón, tendremos finalmente que:

$$\beta = \frac{m^+\,\omega^2\left[rd + \frac{d^2}{2}\right]}{gne} \qquad [11]$$

La expresión [11] nos indica que la tensión se establece entre los electrodos de los tubos de la centrífuga objeto de nuestro estudio, es independiente de la concentración y de la temperatura del electrolito y sólo depende de la masa m^+ del catión cuando la velocidad de rotación permanece constante.

La fórmula [9] también puede ser obtenida inmediatamente por un razonamiento termodinámico y por consiguiente independiente en cierto modo de las hipótesis cinéticas que se establezcan.

Imaginemos que por vía isotérmica y reversible hacemos pasar un catión-gramo de la región de concentración c_b^+ a la región de concentración c_a^+. Si una vez efectuada esta operación abandonamos el catión gramo a la acción del campo centrífugo, se restituirán las condiciones iniciales.

El trabajo total obtenido será:

$$RT\,l\,\frac{C_b^+}{C_a^+} - \frac{M\,\omega^2}{g}\int_0^d (r + x)\,dx \qquad [12]$$

o sea:

$$\mathrm{RT}\, l \frac{\mathrm{C}_b^+}{\mathrm{C}_a^+} - \frac{\mathrm{M}\,\omega^2}{g}\left[rd + \frac{d^2}{2}\right] \qquad [13]$$

pero como el ciclo es cerrado e isotérmico, el trabajo total es nulo luego:

$$\mathrm{RT}\, l \frac{\mathrm{C}_b^+}{\mathrm{C}_a^+} = \frac{\mathrm{M}\,\omega^2}{g}\left[rd + \frac{d^2}{2}\right] \qquad [14]$$

y por consiguiente, si tenemos en cuenta [1] tendremos:

$$\beta = \frac{\mathrm{M}\,\omega^2\left[rd + \frac{1}{2}d^2\right]}{gn\,\mathrm{F}} \qquad [15]$$

Finalmente se puede calcular directamente la fuerza electromotriz β sin más que tener en cuenta las consideraciones siguientes:

Cuando se sumerge un electrodo metálico en el seno de una disolución de sus iones, adquiere un potencial cuya producción obedece bien al mecanismo establecido por Nernst, debido a la pugna entre la presión de disolución del metal y la presión osmótica de sus iones, o bien al mecanismo establecido por el autor (1) cuyo fundamento radica en la adsorción de iones. Sea cual fuere la hipótesis que se adopte para establecer el salto de potencial, es evidente que si sobre las partículas que lo originan se superpone una fuerza extraña que actúa en un determinado sentido, es decir, si los cationes se encuentran en el seno de un campo tal como el campo centrífugo que se establece en el tubo, las condiciones de producción del salto de potencial sobre el electrodo *a* no serán las mismas que las que se establezcan sobre el electrodo *b*, puesto que tanto en uno como en el otro electrodo, el equilibrio osmótico o el equilibrio de adsorción se habrá perturbado de distinta manera. Pero sobre el electrodo *a* existe un defecto de cationes, mientras qu esobre el *b* ocurre todo lo contrario y por ello, cualquiera que sea la teoría que adoptemos, sobre el electrodo *a* existirá un exceso de electrones, mientras que sobre el *b* existirá un defecto. Por lo tanto, *a* será siempre electrodo negativo mientras que *b*, por el contrario, será el positivo.

Al centrifugar se crea entre los electrodos *a* y *b* una diferencia de potencial y por consiguiente un campo

$$E = -\frac{d\beta}{dx} \qquad [16]$$

que se opone al movimiento del catión hacia el fondo del tubo, puesto que tratará de arrastrarlo hacia el electrodo negativo *a*. El efecto del campo E es contrario al de la fuerza centrífuga y podemos considerarlo como una reacción a dicha fuerza.

Indudablemente, el equilibrio se establecerá cuando el efecto del campo eléctrico sobre el catión sea exactamente igual al efecto de la fuerza centrífuga, en cuyo instante los cationes adoptarán posiciones medias estacionarias a lo largo del tubo de la centrífuga y la concentración adoptará una distribución permanente mientras la velocidad de rotación sea constante.

La condición de equilibrio a circuito abierto será:

$$\frac{d\beta}{dx} ne = \frac{m^{+} \omega^2 (r + x)}{g} \qquad [17]$$

Si integramos tendremos:

$$\beta = \frac{m^{+} \omega^2}{gne} \int_0^d (r + x)\, dx = \frac{m^{+} \omega^2 \left[rd + \frac{1}{2} d^2\right]}{gne} \qquad [18]$$

y de aquí que:

$$\beta = \frac{M \omega^2}{gn F} \left[rd + \frac{d^2}{2}\right] \qquad [19]$$

expresión que concuerda con la obtenida por procedimientos anteriores.

La expresión:

$$M \omega^2 \left[rd + \frac{1}{2} d^2\right] \qquad [20]$$

tiene las dimensiones de una energía. Para que β venga expresada en voltios habrá que expresar el numerador de [10] en julios y la carga F en culombios.

Si expresamos M en gramos, *r* y *d* en centímetros y *g* en cen-

tímetro/segundos², el producto vendrá expresado en ergs. Para expresarlo en julios habrá que dividirlo por 10^7; luego:

$$\beta = \frac{M\,\omega^2\left[rd + \frac{1}{2}d^2\right]}{gn\,F \cdot 10^{-7}} \text{ Volts.} \qquad [21]$$

o bien si llamamos ν el número de revoluciones por segundo de la centrífuga, tendremos:

$$\beta = \frac{4\,\pi^2\,\nu^2\,M\left(rd + \frac{1}{2}d^2\right)}{gn\,F \cdot 10^{-7}} \qquad [22]$$

efectuando operaciones, quedará finalmente:

$$\beta = \frac{4{,}2 \cdot 10^{-14} \cdot M\,\nu^2}{n}\left[dr + \frac{1}{2}d^2\right] \text{ Volts.} \qquad [23]$$

Pasemos ahora a considerar cuál sería la expresión de β si en el electrolito y también en los metales que constituyen los electrodos, existieran, por ejemplo, dos isótopos de masas m_1 y m_2.

La fórmula [1] no establece distinción entre los isótopos de un mismo metal. No así la fórmula [11], en la cual interviene la masa del catión. Realmente β es tan sólo función de una masa y por consiguiente si en el electrolito y en los metales que forman los electrodos hubiera tan sólo un isótopo, las tensiones

$$\beta_1 = \frac{m_1\,\omega^2\left(rd + \frac{1}{2}d^2\right)}{gne}$$

$$\beta_2 = \frac{m_2\,\omega^2\left(rd + \frac{1}{2}d^2\right)}{gne} \qquad [24]$$

serían diferentes en igualdad de condiciones, es decir, para una misma velocidad de rotación y para una misma centrífuga.

Pero el caso real no es éste, sino aquél en que en el seno del electrolito existen cationes de masas diferentes, correspondientes a uno o varios isótopos. Veamos cuál sería el potencial producido por una mezcla y supongamos, para simplificar, que en el metal no existe nada más que dos isótopos.

Utilizando los criterios sencillos que hasta ahora hemos adoptado, podemos desglosar la presión osmótica total π^+ producida por ambas especies de cationes en la presión osmótica $\pi_1{}^+$, debida a los cationes de la especie m_1 y en la presión osmótica $\pi_2{}^+$ debida a los cationes de la especie m_2. Por lo tanto, si nos referimos a un cm³ de disolución, podemos escribir que:

$$\pi^+ = \pi_1{}^+ + \pi_2{}^+ = (c_1 + c_2)\mathrm{RT} \qquad [25]$$

siendo c_1 y c_2 las concentraciones expresadas en número de iones-gramo/cm³.

Si suponemos que c_1 corresponde a la concentración del isótopo más abundante y llamamos α a la relación fija que existe entre ellos tendremos:

$$\pi = c_1(1 + \alpha)\mathrm{RT} \qquad [26]$$

Si repetimos razonamientos empleados para la obtención de β, teniendo en cuenta [2] y que en el caso presente la masa de los cationes contenidos en un cm³ de disolución es igual a

$$c_1\,\mathrm{M}_1 + c_2\,\mathrm{M}_2 \qquad [27]$$

siendo M_1 y M_2 el peso de un ión-gramo de la especie m_1 y m_2, respectivamente, llegaremos fácilmente a obtener la expresión:

$$\frac{dc}{c} = \frac{(\mathrm{M}_1 + \alpha\,\mathrm{M}_2)\,\omega^2\,(r + x)\,dx}{g\,(1 + \alpha)\,\mathrm{RT}} \qquad [28]$$

siendo c la concentración *total* de las partículas positivas.

Por otra parte, la expresión [1] depende tan sólo de esta concentración total, luego

$$\beta = \frac{(\mathrm{M}_1 + \alpha\,\mathrm{M}_2)\,\omega^2\left(rd + \frac{1}{2}d^2\right)}{g\,(1 + \alpha)\,n\,\mathrm{F}} \qquad [29]$$

Para un número h de isótopos se tiene evidentemente:

$$\beta = \frac{\left(\mathrm{M}_1 + \sum_{i=2}^{i=h-} \alpha_i\,\mathrm{M}_i\right)\left(rd + \frac{d^2}{2}\right)}{g\left(1 + \sum_{i=2}^{i=h-1} \alpha_i\right) n\,\mathrm{F}} \qquad [30]$$

Si llamamos M el peso atómico medio que tiene que corresponder al peso hallado por los procedimientos estadísticos ordinarios, tendremos:

$$M = \frac{M_1 + \sum_{i=2}^{i=h-1} \alpha_i M_i}{1 + \sum_{i=2}^{i=h-1} \alpha_i} \qquad [31]$$

y por consiguiente:

$$\beta = \frac{M \omega^2 \left(rd + \frac{1}{2} d^2 \right)}{gn F}$$

El peso M siempre será mayor que el peso de cualquiera de los isótopos componentes, luego la fuerza electromotriz β debida a la centrifugación de una mezcla de isótopos sería siempre mayor que la originada por uno cualquiera de los componentes en igualdad de condiciones.

Supongamos ahora que unimos eléctricamente, mediante un circuito exterior (fig. 4) los electrodos *a* y *b*. En este instante queda roto el equilibrio que se establece entre el campo eléctrico y la fuerza centrífuga y ésta no quedará compensada por aquél puesto que la tensión V que ahora existe entre los electrodos será inferior a β e igual a $\beta - \delta i$, siendo δ la resistencia del circuito exterior e *i* la intensidad de la corriente que circula por el mismo.

La electrolisis «centrífuga» puede entonces producirse y los cationes emigrarán hacia el electrodo *b* en donde se descargaría mientras que el *a* emitiría, disolviéndose, un número igual a los descargados. El tubo de la centrífuga actuaría como un generador galvánico, cuya fuerza electromotriz sería β.

Las ecuaciones del movimiento de los iones, suponiendo que la resistencia que les opone el medio en que están disueltos es proporcional a la velocidad y suponiendo también que por tratarse de partículas de un diámetro muy reducido que se mueven en un medio resistente alcanzan finalmente un movimiento uniforme, serán:

$$\begin{aligned} k_1 v_1 &= \frac{dV}{dx} n_1 e - \frac{m_1}{g} \omega^2 (r + x) \\ k_2 v_2 &= \frac{dV}{dx} n_2 e - \frac{m_2}{g} \omega^2 (r + x) \end{aligned} \qquad [32]$$

en donde m_1, m_2, v_1, v_2, n_1 y n_2 representan las masas velocida-

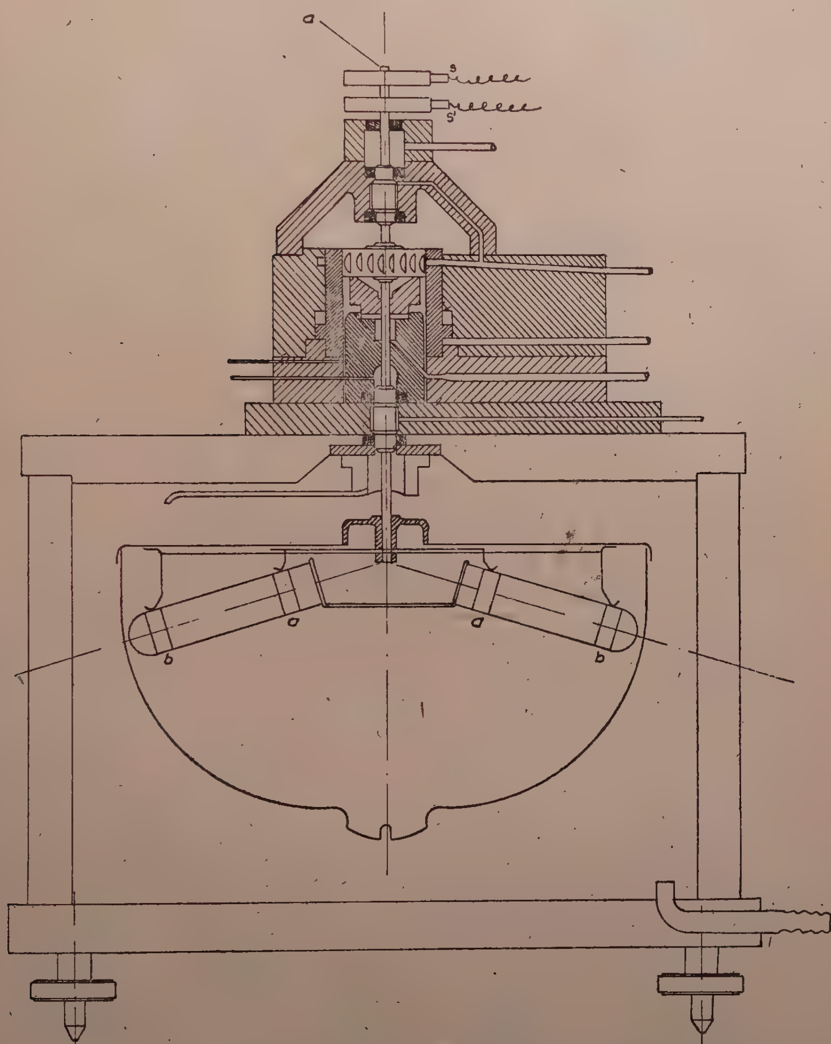


Figura 8

des y valencias de los aniones y cationes, respectivamente. Ahora bien, teniendo en cuenta que

$$k_1 = \frac{1}{U^+} \quad \text{y} \quad k_2 = \frac{1}{U^-}$$

siendo U^+ y U^- las movilidades de los iones, tendremos en definitiva que

$$v_1 = \frac{1}{U^+}\left[\frac{dv}{dx} n_1 e - \frac{m_1}{g} \omega^2 (r + x)\right]$$
$$v_2 = \frac{1}{U^-}\left[-\frac{dv}{dx} n_2 e - \frac{m_2}{g} \omega_2 (r + x)\right] \qquad [33]$$

Consideremos ahora el caso en que el metal y el electrolito conste de varios isótopos, dos por ejemplo de masa m_1 y m_2, siendo $m_1 > m_2$.

Si cerramos el circuito exterior, podremos siempre regular la corriente de tal manera que, la caída de tensión V a lo largo del tubo sea exactamente igual a la fuerza electromotriz que se produciría si entre los eléctrodos no existiera nada más que una sola especie de cationes. En efecto, hemos visto que la tensión β producida por una mezcla de isótopos m_1 y m_2 es mayor que la β_1 y β_2 que se produciría en el tubo si en el electrolito sólo existiesen cationes de la especie m_1 y m_2. También hemos visto que si m_1 es mayor que m_2 entre las tensiones β, β_1 y β_2 existe la siguiente relación de desigualdad:

$$\beta > \beta_1 > \beta_2 \qquad [34]$$

que se mantiene cualquiera que sea la concentración en que se encuentren los referidos cationes. Pues bien, si centrifugamos el electrolito y regulamos la resistencia exterior δ de tal manera que la caída de tensión V sea igual a β_2 o a β_1 podremos hacer que los únicos cationes que contribuyan a la electrolisis sean los de la especie m_2 o los de la especie m_1, respectivamente. En efecto, supongamos que la intensidad i, que circula por el circuito es tal que

$$\beta - \delta i_1 = \beta_2 \qquad [35]$$

En estas condiciones, sobre todos los cationes m_2 que están contenidos entre los electrodos, actúa un campo antagonista

$$-\frac{\delta \beta_2}{dx}$$

tal que:

$$\frac{d\beta_2}{dx} n e = \frac{m_2}{g} \omega^2 (r + x) \qquad [36]$$

es decir, que todos los cationes de masa m_2 quedarán detenidos y no contribuirán al paso de la corriente i.

En cambio, para los cationes de masa m_1 se verifica que

$$\frac{d\,\beta_2}{dx}\,n\,e < \frac{m_1\,\omega^2}{g}\,(r+x) \qquad [37]$$

y, por lo tanto, sobre el electrodo b se descargarán tan sólo los cationes de la especie m_1 y la electrolisis se producirá a expensas de los cationes más pesados que existan en el tubo.

Si por lo contrario hacemos que V sea igual a β_1 tendremos que:

$$\beta - \delta i_2 = \beta_1 \qquad [38]$$

y entonces los cationes detenidos serán los m_1, puesto que sobre ellos actúa un campo tal que:

$$\frac{d\,\beta_1}{dx}\,n\,e = \frac{m_1\,\omega^2}{g}\,(r+x) \qquad [39]$$

Sobre todos los cationes de masa m_2 actuará entonces un campo eléctrico

$$\frac{d\,\beta_1}{dx}\,n\,e > \frac{m_2\,\omega^2}{g}\,(r+x) \qquad [40]$$

y, por consiguiente, los cationes más ligeros emigrarían hacia el electrodo *a*, sobre el cual se depositarían cambiando de sentido la corriente.

Finalmente, si la caída de tensión V es menor que β_2 los fenómenos críticos que hemos señalado ya no se producirán, y como en este caso la fuerza eléctrica será siempre menor que la centrífuga no se podrá compensar el efecto de arrastre, y por consiguiente sobre el electrodo b se descargarán las dos clases de iones positivos.

RESUMEN

$$\beta > \beta_1 > \beta_2$$

$V < \beta_2$ El sentido de la corriente será del electrodo *a* al *b*, descargándose en *b* ambas especies de iones.

$V = \beta_2$ El sentido de la corriente será el mismo que en el caso anterior, pero sólo se descargarán sobre *b* los iones más pesados.

$\beta_2 < V < \beta_1$ Los cationes más ligeros se descargarán sobre *a*, mientras que los más pesados se descargarán sobre *b*.

$V = \beta_1$ Los cationes más pesados quedarán detenidos, mientras que los más ligeros caminan de *b* a *a*. En la corriente sólo intervienen los cationes más ligeros, cambiando de sentido.

$\beta_1 < V < \beta$ Todos los cationes, tanto ligeros como pesados, se descargarán sobre el electrodo *a*.

* * *

Los resultados teóricos que se han establecido no tienen más valor que el haber sido deducidos de leyes sencillas, cuya validez está fuera de toda duda. No se pretende que sean exactas y sólo se expone en este trabajo como una introducción a un problema que no creemos que haya sido acometido aún.

La experiencia sería costosa puesto que habría que emplear máquinas centrífugas extraordinariamente veloces y equipos para detectar tensiones muy débiles. Basta considerar que las fuerzas electromotrices producidas por un metal y sus isótopos serían muy próximas entre sí y habría que «dosificar» la tensión V que se establece entre los electrodos con una gran precisión.

Si se quieren manejar tensiones cómodamente medibles, es necesario alcanzar velocidades de rotación de al menos 1.000 revoluciones por segundo, es decir, 60.000 revoluciones por minuto. De no ser así, difícilmente se podrían obtener resultados con máquinas de dimensiones normales. Afortunadamente desde el año 1937 la técnica de las hipercentrífugas se ha desarrollado con rapidez, sobre todo en aquellas máquinas en que el rotor se mueve en el vacío, accionado exteriormente por una turbina de aire o de gas hidrógeno. En este tipo de aparatos la velocidad máxima está prácticamente limitada por la resistencia a la ruptura de los materiales que se emplean en la fabricación del rotor.

Las primeras aplicaciones de estas centrífugas fueron biológicas y particularmente encaminadas a la concentración de virus, pero recientemente y debido a los esfuerzos realizados para dominar la energía nuclear, han entrado de lleno en el campo de la obtención de los isótopos (2).

Con este tipo de aparatos se ha logrado separar no ya las sus-

tancias en suspensión, sino aquéllas que se encuentran en una verdadera disolución. En nuestro caso el efecto de centrifugación no se emplea para separar sustancias dispersas en un medio determinado, sino para generar fuerzas electromotrices que ulteriormente se pueden aprovechar para una separación. De esta manera la separación propiamente dicha constituye un resultado indirecto que no requiriría velocidades imposibles de alcanzar en la práctica.

La centrífuga, cuyo rotor hemos esquematizado en la figura 3, puede ser una centrífuga de turbina de aire tal como la descrita por J. V. Beams (3), salvo en lo que se refiere a la parte eléctrica y toma de tensión por dos anillos rozantes solidarios del eje. Estas centrífugas se compensan automáticamente y pueden girar a una velocidad muy elevada sin calentamientos dañosos. Generalmente están provistas de un eje elástico para que rotor «busque» su eje de rotación y se mantenga indefinidamente en él con una gran estabilidad dinámica sin vibraciones dañosas.

Sobre el eje *a* están unidos rígidamente los anillos rozantes *s* y *s'* con sus escobillas para la toma de tensión. Estos anillos comunican eléctricamente con los electrodos *a* y *b* a través del eje y cuerpo de la centrífuga de la forma que hemos esquematizado en la figura 1. Si las escobillas y los anillos dieran lugar a falsos contacto y a caldeamientos que alteraran el valor de las pequeñas fuerzas electromotrices que se tratan de obtener es posible su sustitución por contacto de mercurio líquido que en forma de chorro caería sobre sectores metálicos convenientemente dispuestos, con una disposición muy parecida a los colectores que se emplean en los interruptores centrífugos.

La centrífuga se movería merced al aire a presión y su velocidad se regularía por medio de una válvula de presión constante que actuaría sobre flujo gaseoso hasta alcanzar la velocidad requerida.

La velocidad de rotación podría ser medida estroboscópicamente o por medio de procedimientos acústicos u ópticos. Eventualmente podría utilizarse para ello el mismo fenómeno de la producción de las tensiones β haciendo solidario al eje dos tubos provistos de electrodos impolarizables que contengan un determinado electrolito. La tensión general en ellos sería directamente proporcional al cuadrado de la velocidad angular y podría ser medible con un micro-

voltímetro cuya escala vendría dada en número de revoluciones por minuto.

En la figura 4 está esquematizado el montaje eléctrico que, como se ve en ella, consta de dos resistencias δ_1 y δ_2 de regulación fina y regulación gruesa, respectivamente, montadas en serie. La tensión entre los anillos colectores se medirá por medio del potenciómetro P, el cual creemos podría ser del tipo Feussner (P.T.R.) para poder obtener por lo menos aproximaciones del orden micro-

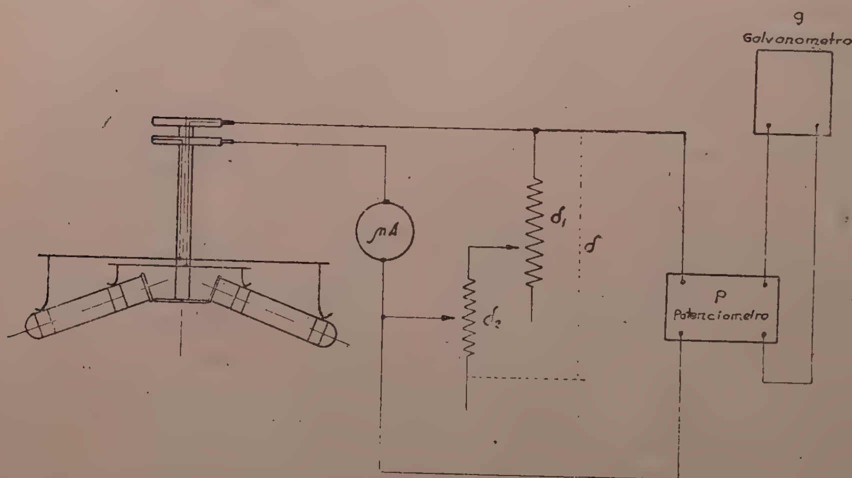


Figura 4

voltio. El galvanómetro podría ser de baja resistencia interna y de una sensibilidad del orden de 10^{-9} A con escala colocada a un metro de distancia del espejo.

Posiblemente interesaría insertar en el circuito un microamperímetro para seguir las incidencias de la corriente producida por la centrífuga y controlar sus más pequeñas variaciones. La magnitud de esta corriente depende de la superficie de los electrodos y del diámetro y longitud de los tubos y si los ensayos dieran resultado positivo, se podría sustituir la centrífuga tal como la hemos descrito por una centrífuga de tipo cilíndrico formada por dos cilindros concéntricos, en cuyo espacio anular podría estar contenido el electrolito. Los mismos cilindros podrían ser los electrodos.

Un mayor refinamiento técnico se podría obtener empleando un miliamperímetro registrador con un procedimiento de registro

análogo a los empleados en los modernos aparatos polarógrafos (4). De esta manera la corriente producida por la centrífuga al elevar gradualmente su velocidad podría ser registrada hasta alcanzar la velocidad crítica en donde se producirían los fenómenos de la separación de cationes de masas diferentes.

* * *

En todo lo que hemos expuesto se sobreentiende que los cationes no están solvatados. Si lo estuvieran, las masas que contribuirían a la producción de los potenciales β serían mayores y dependientes del número de moléculas de disolvente que cada catión fuera capaz de fijar.

Indudablemente si esto ocurriera, la experiencia que sugerimos al exponer estas líneas podría ser un factor muy importante en el estudio de la solvatación. Por otra parte, si ésta fuera muy intensa, la masa del catión sólo representaría una fracción muy pequeña de la masa total y pudiera ser que fuera muy difícil separar los isótopos en estas condiciones. Pero es necesario tener en cuenta que entonces las tensiones β producidas en la centrífuga serían mucho mayores que las que se producirían en ausencia de solvatación, lo que permitiría un mejor control y ajuste de las tensiones críticas.

Finalmente, el procedimiento pudiera ser útil como medio de identificación de iones a la manera del polarógrafo, sin más que extender lo dicho a mezclas de cationes diferentes, cuya precipitación podría controlarse a voluntad.

La aplicación de todo lo expuesto al uranio U-235 y U-238, suponiendo que se emplea una solución de tetracloruro de uranio, en la cual el catión no está solvatado (?) y tiene una valencia igual a seis, será:

Tensión β para el U corriente:

Peso atómico, 238,5. Centrífuga a 1.000 r.p.s.

$\beta = 3{,}97 \cdot 10^{-3}$ Volts., $d = 60$ cm., $r = 10$ cm.

Tensión β_2 para el U-235 en las mismas condiciones:

$\beta_2 = 3{,}91 \cdot 10^{-3}$ Volts.

Tensión para el U-238:

$$\beta_1 = 3{,}96 \cdot 10^{-3} \text{ Volts.}$$

Madrid, 25 de agosto de 1947.

BIBLIOGRAFIA

(1) R. Salcedo y J. Palacios.—La adsorción como origen de fuerzas electromotrices. Estos Anales, tomo XL, 387, p. 604 (1944).

(2) J. W. Beams y C. Skarströn. *Phys. Rev.* 56, 266 (1939).—R. F. Humphreys. *Phys. Rev.* 56, 684 (1939).

(3) Beams y Pickels.—*Rev. Sci. Inst.* (6), 299-1935.—Beams J. App. Phys. 8-795-1937.—Beams F. W. Linke y P. Sommer. *Rev. Sci. Inst.* 9 agosto 1933.

(4) W. Grey Walter y Alan A. Brooks.—A. Portable Two Channel Amplifies and Ink. Recorder. *Electronic Engineering.* 2 julio 1947, pág. 221-226.

15.—DAZA DE VALDES Y EL RENDIMIENTO DE LOS ANTEOJOS,

por J. M. OTERO NAVASCUÉS.

Los descubrimientos de Optica Oftalmológica del genial cordobés que da nombre a nuestro Instituto y su exposición sistemática de la doctrina del uso y medida de los vidrios correctores, encontraron eco desde la publicación de la obra fundamental del Notario de la Santa Inquisición en 1623 y han sido glosados repetidas veces. Los historiógrafos de la Optica, singularmente los alemanes, reconocen la primacía de nuestro compatriota en la descripción de las gafas protectoras, de las gafas de color para reducir el esplendor (invento que era lógico se realizase bajo el radiante sol de Andalucía). Daza descubre las ventajas de los vidrios de anteojo hechos de cuarzo, singularmente en su menor aberración cromática y su mayor conductividad calorífica que hace se empañen menos que los de vidrio. Boegehold y Von Rohr señalan que Daza es el primero que describe la anisometropía y forma de corregirla, y el método y sistema de Daza para medir las potencias de las lentes ha sido origen de muchas publicaciones.

En Optica Geométrica la aportación de nuestro compatriota es fundamental al señalar la influencia de la aberración esférica según la forma de las lentes, señalando la ventaja de la lente plano-convexa con la cara plana, mirando a la luz y de la plano-cóncava colocada en posición inversa.

Pero hasta la fecha, que sepamos, nadie se ha fijado en la notable aportación de Daza a la forma de valorar el rendimiento de los sistemas telescópicos en el que Daza da el método correcto, con justo tres siglos de antelación sobre las primeras definiciones rigurosas de tal valoración, siendo además notables algunas otras observaciones de menor importancia de nuestro gran maestro y patrón.

El completo divorcio de físicos y fisiólogos desde que Euler comienza a tratar aisladamente los instrumentos ópticos prescindiendo de que anteojos y microscopios tienen su uso normal y aun etimológico en combinación con el ojo del observador, produjo durante todo el siglo pasado y primer cuarto de éste, una disposi-

ción mental, por la que únicamente se definían los rendimientos en función en primer lugar de la difracción y más adelante de la difracción combinada con las aberraciones geométricas. Surge la famosa regla de Lord Rayleigh, receta mágica con la que en un minuto puede valorarse la eficiencia de un objetivo de anteojo.

Desgraciadamente, las cosas son bastante más complicadas; dos anteojos de objetivos geométricamente idénticos y que darían el mismo poder separador con la regla de Lord Rayleigh, pueden dar rendimientos reales muy diversos sin más que uno esté bien corregido en sus aberraciones y el otro tenga una corrección defectuosa, que el uno tenga pocas superficies ópticas y éstas tratadas en su superficie para evitar reflejos y el otro las tenga numerosas y sin tratamiento; y, por último, que un anteojo se use en condiciones de gran esplendor del blanco y el otro se utilice con luz escasa, y todo ello aun cuando ambos sean geométricamente iguales, esto es, tengan igual diámetro de objetivo, igual relación de apertura e iguales aumentos.

En 1927 Kühl comienza a hablar de rendimiento de anteojos relacionándolos con la agudeza visual que éstos pueden suministrar en relación con la propia del ojo del observador provisto de anteojo (1). Pocos años más tarde el tema es recogido por Flügge (2), quien habla de «*aumento* de agudeza visual», designando con el mismo la relación de la agudeza visual del observador provisto de anteojo, al desprovisto de instrumento que es variable para cada esplendor de la mira que se observa. Un año más tarde las cosas se perfilan aún más con Nagel y Klughardt (3), quienes reivindican la paternidad del concepto *rendimiento de anteojo* definiéndolo como la relación entre el rendimiento del ojo con instrumento al del mismo sin instrumento. Nagel y Klughardt hacen referencia al trabajo de Kühl, pero indicando que el investigador de Jena ha renunciado a las posibilidades que el nuevo concepto ofrecía sin introducirlo para nada en sus subsiguientes investigaciones de Optica Fisiológica e Instrumental. El tema lo recogen de nuevo los mismos autores en 1942 (4) aplicándolo a la comparación de anteojos de Galileo y prismáticos, de diferentes características geométricas.

El asunto es considerado como una novedad completa y en 1927, a raíz del trabajo de Kühl, una autoridad del calibre de Otto Eppenstein, en un libro clásico (5), dice: «La cuestión de la mejora de la visión por medio del anteojo se desarrolla nuevamente

en forma teórica en un trabajo de Kühl recientemente aparecido, al cual sólo podemos referirnos brevemente. Kühl define el *rendimiento visual* del anteojo mediante la agudeza visual que a través de él se obtiene, aplicando ésta en su sentido oftalmológico, esto es, basándose en la utilización de escalas visuales normales en la exploración oftalmológica...»

Pues bien, el asunto es tan joven y nuevo que en la época de la afirmación de Eppenstein acababa de cumplir sus 304 años. En efecto, en el diálogo cuarto del libro de Daza, titulado «En qué se trata de los antojos visorios o cañones con que se alcanza a ver a distancia de muchas leguas», los interlocutores, el doctor, el maestro (fabricante de visorios), Julián, Alberto y Leonardo, se encaminan a lo alto de la torre de la Giralda para probar algunos visorios construídos por el maestro. He de renunciar a transcribir por completo el sabroso diálogo, que recomiendo, no tan sólo a los amantes de la historia de las ciencias, sino a los que saben gustar de la buena literatura. El maestro utiliza para ver Carmona un visorio de cuatro varas mientras que con uno de seis palmos se observa la torre de Guadaira, y ante las preguntas de sus compañeros el maestro define así la forma de valorar los visorios:

«Y para que vos conozcáis que tanto sea esto, lo sabréis por una experiencia que yo he hecho en la cual considero que lo que aumentan los visorios no es sino acercar la imagen de aquella cosa que vemos, tanta cantidad más de lo que está como vos mismo lo conoceréis haciendo la prueba. *Fijad una poca de letra en la pared y apartáos de ella hasta que no la podáis leer un solo pie más atrás y después mirad la misma letra con un visorio lo más lejos que pudiérades hasta que casi no la veáis y medid cuantas partes de las que leisteis con vuestra vista caban en la distancia larga que pudisteis leer con el visorio y tantas partes son las que se acerca más la letra.*»

Esto es, Daza define poco más de una veintena de años después del descubrimiento del anteojo el criterio valorativo integral de los mismos al que habían de llegar los investigadores alemanes hace poco menos de cuatro lustros.

Los visorios que describe Daza son anteojos de Galileo y su contribución al estudio de los mismos no se detiene ahí. En el mismo diálogo señala la importancia fundamental del objetivo y la poca importancia relativa del ocular:

«Con brevedad os daré relación de todo para que podáis vos armar un visorio cuando os diere gusto, para lo cual sabréis cómo su fábrica consiste en una luna (lente) convexa que es la delantera y otra cóncava que es la que se pone a los ojos; pero todo el secreto está en la convexa, como ella sea buena y abra con claridad, todo lo demás es fácil porque cualquiera luna cóncava hace.»

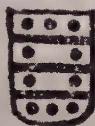
Y más adelante añade: «Y habéis de advertir que cuanto más grande se le añade a la luna cóncava, acerca más el visorio, aunque oscurece y fatiga mucho la vista.»

Daza distingue también que con un anteojo al observar manantiales de luz puntuales no se aumenta el diámetro aparente sino tan sólo el esplendor del manantial, refutando los errores de los que creían que con los anteojos podrían verse las estrellas con grandes diámetros aparentes. Después de hacer notar como la observación de la luna por el anteojo descubre detalles desconocidos, pero con las estrellas no ocurre lo mismo:

«Me admiro más que estos visorios no agranden las estrellas sino antes las hagan menores, aunque más vivas y resplandecientes. Por donde venimos en mayor conocimiento de su inmensa distancia, pues con acercarlas tanto a nosotros, como vemos por otras cosas, con todo eso se quedan tan pequeñas miradas con los visorios como parecen sin ellos.»

He intentado, aunque en vano, determinar las focales relativas de objetivo y ocular y con ello sus aumentos en los visorios descritos por Daza y cuya longitud es de cuatro, dos, vara y cuarta, tres cuartas de vara, tercios de vara, seis dedos y cuatro dedos.

La razón del fracaso estriba en que, pese a nuestros esfuerzos (y he de destacar la labor realizada en este sentido por mi colaboradora la Srta. Martín-Tesorero), no ha sido posible identificar las medidas de potencia de Daza (grados) valorándolas con nuestras dioptrías. En esta tarea von Rohr y von Pfluck tampoco llegan a resultados convincentes (6) y ello es debido a que, en esta ocasión, Daza se inspira en trabajos no originales que él interpreta mal y por ello su graduación de las lentes, que, por otra parte, le ha hecho famoso, no nos permite traducirla a nuestras medidas. La valoración del grado de Daza en 1,25 dioptrías, que es a la consecuencia que llega Palacios (7), nos llevaría a dar al anteojo de cuatro varas de largo tan sólo doce aumentos, cosa a todas luces falsa, ya que el famoso anteojo con el que Galileo descubrió las fases de Venus, tenía más de treinta aumentos.





LIC. BENEDICT.
AETAT. SVAE 32 AN

VSO
DE LOS ANTOIOS
PARA TODO GENERO DE VISTAS:

En que se enseña a conocer los grados que a cada vno le faltan de su vista, y los que tienen quales-quier antojos.

Y ASSI MISMO A QVE TIEMPO SE AN de vsar, y como se pediran en ausencia, con otros auisos importantes, a la vtilidad y conseruacion de la vista.

POR EL L. BENITO DAÇA DE VALDES,
Notario de el Santo Oficio de la Ciudad de Sevilla.

DEDICADO A NVESTRA SEÑORA de la Fuensanta de la Ciudad de Cordoua.



CON PRIVILEGIO.
Impresso en Seuilla, por Diego Perez. Año de 1623.

dan estos visorios, y de lo que se podia alcançar a ver con ellos: y dixo uno que se preciava de muy artifice, que el tenia un visorio, q̃ acrecentava ochenta vezes mas qualquiera cosa, y que cada Estrella la mostraua tan grãde como la Luna; y pues en todo hablais tan magistralmente, holgaré saber de vos lo que ay en esto. Maestro. Largo seria de contar, si uvieramos de referir las cosas que se an añadido en materia de visorios: pero hablando de lo q̃ yo è visto, y delas experiẽcias que é hecho con ellos, se deziros, q̃ este instrumento de dos lunas, no alcança à mostrar grandes las Estrellas, por largo que sea, y por muchos grados q̃ tenga la cõcava q̃ se aplica à los ojos: solo en el cuerpo de la luna que está mas cerca, y en otras cosas de aca de la tierra, se echa de ver lo mucho q̃ engrandecen. Y para que vos conozcais que tanto sea esto, lo sabreis por una experiencia q̃ yo é hecho: en la qual considero q̃ lo que aumentan los visorios, no es sino acercar la imagẽ de aquella cosa que vemos, tanta cãtidad mas de la que ella està; como vos mismo lo conocereys haziẽdo la prueva. Fixad una poca de letra en la pared, y apartaos de ella hasta que no la

podeys leer un ſolo pie mas atras, y deſpues mirad la miſma letra con un viſorio, lo mas lexos que pudieredes, haſta que caſi no la leais; y medid luego quantas partes de las que leyſtes con vueſtra viſta, caben en la diſtancia larga que pudiſtes leer con el viſorio, y tantas partes ſon las que ſe acercan mas la letra. De modo que por mi quenta hallo yo, que los viſorios de à vara, acercan dé veinte partes las diez y nueve; y por eſte orden van acercando mas los mas largos, y menos los mas cortos: y de aqui colegireys, á que tantas leguas ſe pueden ver las partes y menudencias de una Ciudad, y à que tanto eſpacio, ſe alcançará a ver y conocer un hombre. Y aveis de advertir que quanto mas grado ſe le añade á la luna concava, acerca mas el viſorio, aunque eſcurece y fatiga mucho la viſta, pero teniendo ſolamente los grados de concavo, que correſponden a los de la luna convexa, acercan eſto que os ê dicho. Alberto. No es menos de ſaber, los grados que tienen las lunas de los viſorios largos, y de los cortos, y que punto piden, para ver à lexos y a cerca perfectamente. Maeſtro. Con brevedad os darè relacion de todo, para que podays vos

ar-

El mismo criterio aplicado al anteojo de cuatro dedos da, en cambio, un resultado satisfactorio, ya que éste aparece con 65 mm. de longitud y 6 aumentos, lo que es perfectamente posible.

La lectura del diálogo de Daza nos permitiría aquilatar más en las aportaciones del investigador español al desarrollo del anteojo. El mérito del sacerdote cordobés es tanto mayor si se considera que su libro aparece once años más tarde tan sólo que el redescubrimiento del anteojo holandés por Galileo y doce de la Dióptrica de Kepler, en la que por primera vez se describe científicamente el funcionamiento del anteojo. Fuera de este libro la primera referencia científica que los historiógrafos de la Optica Court y von Rohr hacen, es el libro de Stelliolas «Il telescopio ovvero Ispicillo celeste», de 1627, la conocida «Rosa Ursina», del P. Scheiner (8), y el capítulo del libro de Martin Hortensius titulado «Propietates Tubi Dioptrici», en su «Dissertatio de Mercurio sub sole viso et Venere invisa», aparecido en 1633, esto es, las tres posteriores al libro de nuestro compatriota y sin que la importancia de su contribución pueda compararse a la del cordobés, al que, en justicia, podemos titular precursor del conocimiento del anteojo lo mismo que fué el indiscutible precursor de la Optica Oftalmológica Científica.

(Presentado en la sesión de marzo.)

Instituto de Optica «Daza de Valdés».
Sección de Historia de la Optica.

BIBLIOGRAFIA

(1) KÜHL.—*Zs. f. Instrde.* 47, 75, 1927.

(2) FLÜGGE.—*Zs. f. Instrde.* 55, 367, 1935.

(3) NAGEL Y KLUGHARDT.—*Zs. f. Instrde.* 56, 222, 1936.

(4) NAGEL Y KLUGHARDT.—*Zs. f. Instrde.* 62, 16, 1942.

(5) CZAPSKI-EPPENSTEIN.—«Grundzüge der theorie der Optischen Instrumente». Leipzig, 1924.

(6) VON ROHR Y VAN PLUCK.—*Zs. F. Augenheilsc.* 40, 50, 77, 1918.

(7) J. PALACIOS.—*Investigación y Progreso.* «La graduación de las lentes en el s. XVII, 1944, p. 1.

(8) *Rosa Ursina*, 1626-1630.

BIBLIOGRAFIA

LIBROS:

R. V. SOUTHWELL.—*Relaxation methods in theoretical physics.* Oxford University Press, 1946, 248 págs.

Es éste un libro típico de la actual orientación que debe tener la Física Teórica. De una parte utiliza el arma matemática en todo lo que pueda servir para resolver problemas físicos. Pero haciendo notar que lo importante no es llegar a una determinada fórmula, sino obtener los valores que la función problema, en una serie de puntos distribuídos regularmente en el dominio estudiado. Tampoco se pretende obtener valores exactos limitándose a buscar aproximaciones cuyos errores sean equivalentes a los que afectan a los datos experimentales que determinan el problema. De otra parte, no es la tarea aislada de un teórico sin conexión con los problemas prácticos y sin escuela. Se trata de la labor coordinada de un equipo de investigadores dedicado a extender la aplicación del método a problemas cada vez más complicados y provistos de un gran interés.

El presente volumen es, en cierta manera, una continuación de «Relaxation methods in Engineering Science», en que se resolvían problemas de ingeniería que se podían expresar mediante ecuaciones de Laplace en una sola dimensión. Se abordan ahora problemas expresables por ecuaciones diferenciales con dos variables del tipo

$$\frac{\partial}{\partial x}\left(X\frac{\partial\psi}{\partial x}\right)+\frac{\partial}{\partial y}\left(X\frac{\partial\psi}{\partial y}\right)+Z=0$$

en que χ y Z son funciones de x, y, y ψ es la función problema cuyos valores de contorno se conocen. En esta expresión están incluídas como caso particular las ecuaciones de Laplace y Poisson en dos coordenadas.

Aun cuando resulta interesante leer los dos volúmenes sucesivamente, en los primeros capítulos del que comentamos se exponen suficientes elementos sobre «ecuaciones diferencia» y «técnicas de relajación» en distintas redes de puntos, tanto regulares como irregulares.

Se estudian después tres tipos de condiciones de contorno, según que estén especificados los valores de ψ, de $\frac{\partial\psi}{\partial\eta}$ o una combinación de ambos. Se indica también la ayuda prestada a estos problemas por la transformación conforme, necesaria en contornos de forma complicada y que resulta de fácil aplicación con este método.

Es posible así resolver multitud de problemas cuya solución era difícil o imposible por los métodos ortodoxos. El método de relajación cobra tal flexibilidad que podrá ser utilizado en todos los campos de la Física Teórica, allí donde problemas reales exijan soluciones algo más explícitas que una simple ecuación imposible de descifrar. Problemas de valores propios (vibración de membranas, estabilidad de placas), de plasticidad, de viscosidad, de ecuaciones biarmónicas, etc., podrán ser abordados por este método.

El libro está valorado con la resolución de 35 problemas específicos, a cada cual más interesante para el físico teórico, en los que se presentan todas las circunstancias posibles. Puede afirmarse así que quien haya seguido al autor en la resolución de estos problemas está capacitado para aplicar este método a cualquier ecuación de Poisson o Laplace, y aun a ecuaciones más complicadas. Mención especial merece la resolución de problemas de torsión, distribución de presiones y temperaturas, filtración de líquidos a través de medios porosos, cálculo de lentes magnéticas, etc., entre los problemas resueltos en este libro.

L. V.

REVISTAS:

Proceedings of the Physical Society

Febrero 1948. Vol. LX, núm. 338.

H. WILMAN.—The structure of photo sensitive lead sulphide and lead selenide deposits and the effect of sensitization by oxigen.—Pág. 117.

W. A. PROWSE.—Solid diagrams Illustrating resonance phenomena.—Pág. 132.

L. R. G. TRELOAR.—Stresses and birefringence in rubber subjected to general homogeneoes strain.—Pág. 135.

C. H. COLLIE, J. B. HASTED AND D. M. RITSON.—The dielectric properties of water and heavy water.—Pág. 145.

KUN HUANG.—Quantum mechanical calculation of the heat of solution and residual resistance of gold in silver.—Pág. 161.

W. E. DUNCANSON AND C. A. COULSON.—Electron momenta in atoms.—Página 175.

MOHAMMED CHAUDRI AND A. G. FENTON.—Some experimenta with adjustable Geiger-Müller counters.—Pág. 183.

N. F. ASTBURY.—The calibration of hydrophones and crystal transceivers.—Página 193.

N. CORCORAN AND J. M. HOUGH.—A method of computing a vertical section of the combined polar diagram of a radio aerial, a flat earth and a vertical screen.—Pág. 203.

Philosophical Magazine

38, 453-532 (1947), julio

G. H. SIVENS.—On Magnetic field theories.—Pág. 453.

R. A. HOUSTOUN.—On an interpretation of the quantum.—Pág. 479.

M. J. S. DEWAR.—An interpretation of light and its bearings on cosmology.—Pág. 488.

AUREL WINTNER.—The bernouillian Fourier diagrams.—Pág. 495.

J. C. JAEGER Y M. CLARKE.—Numerical results for some problems on conduction of heat in slabs with various surface conditions.—Pág. 504.

A. HAMMAD.—The primary and secondary scattering of sunlight in a plane-stratified atmosphere of uniform composition. Part. 111. Numerical Tables and discussion of secondary scattered light.—Pág. 515.

C. J. TRANTER.—Note on a problem in heat conduction.—Pág. 530.

Helvetica Physica Acta

21, 1-92 (1948).

F. OLLENBACH.—Ueber die Bildung des Strichfokus in Röntgenröhren.—Página 3.

W. DÄLLENBACH.—Berechung eines Spiral-Beschleunigers für schwere Teilchen.—Pág. 21.

G. Wentzel.—Zwei Bemerkungen zur Theorie der Streumatrix.—Pág. 49.

A. Sebler y P. Huber.—Eintritts resonanzen schneller Neutronen an N^{14} und S^{32}.—Pág. 59.

J. Dreyfus-Graf.—Les formules de l'effet Doppler dans la théorie ellipsoidal de la relativité restreinte (erreur des formules d'Einstein).—Pág. 87.

Physica

13, 605-669 (1947).

B. R. A. Hijboer.—The difraction theory of optical aberrations.—Pág. 605.

J. Volger, F. W. de Vrijer and C. J. Gorter.—Paramagnetic spin absorption in some hydrated and anhydrous paramagnetic salts.—Pág. 621.

J. B. Ubbink.—Thermal conductivity of gaseous helium.—Pág. 629.

J. Volger, F. W. de Vrijer and C. J. Gorter.—Paramagnetic spin absorption of meter waves in $Fe(NH_4)_2\,(SO_4)_2 \cdot 12H_2O$ and $CrK(SO_4)_2 \cdot 12H_2O$ at 77° and 90° K.—Pág. 635.

W. K. Walstra.—The velocity of sound in gaseous helium in connection with the virial coefficients.—Pág. 643.

J. Volger, F. W. de Vrijer and C. J. Gorter.—Paramagnetic absorption in manganous ammonium sulphate hezahydrate.—Pág. 653.

J. B. Ubbink.—Pressure dependence of the coefficient of heat conductivity for the gases helium and hydrogen at low temperatures.—Pág. 659.

W. L. Scheen.—The absorption of high energy electrons in cosmic radiation. Pág. 669.

Canadian Journal of Research

25, 303-357 (1947).

W. V. Mayneord and A. J. Cipriani.—The Absorption of Gamma-rays from Co^{60}.

G A. Woonton and J. G. Tillotson.—The E-plane Radiation Pattern of Short Electromagnetic Horns of Large Aperture.

S. G. Ellis.—The use of diafragms in the electron microscope.

Paul Lorrain.—A low-pressure glow-discharge proton source.

L. D. Armstrong and T. M. Dauphinee.—Thermal conductivity of metals at high temperatures. 1. Description of the Apparatus and measurements on iron.

Proceedings of the Cambridge Philosophical Society

44, 1-142 (1948).

Kovasznay, L. I. G.—Laminar flow behind a two-dimensional grid.

Le Couteur, K. J.—Particles of half-odd integral spin.

Chang, T. S.— Field theories with high derivatives.

Ramsey, W. H.—On the determination of phase shifts.

Kinsey, B. B., Cohen, S. G. and Dainty, J.—A coincidence method of measuring a flux of fast neutrons.

Wilkinson, D. H.—The stopping power of polythene and fast neutron flux measurements.

Broda, E., Kowarski, L. and West, D.—The yield of ^{139}Ba in the fission of natural uranium by fast and slow neutrons.

Jelley, J. V. and Paul, E. B.—An electrical method for the determination of short-period activities and its use in the evaluation of the half-life of ^{12}B.

Journal of Applied Physics

Febrero 1948.

DAVID GILBARG Y ROBERT A. ANDERSON.—Influence of Atmosphere Pressure on the Phenomena accompanying the entry of spheres into water.—Pág. 127.

BENJAMIN EPSTEIN.—Statistical aspects of fracture problems.—Pág. 140.

J. S. KOEHLER.—Electronic differential analyzer.—Pág. 148.

S. MILLMAN Y A. T. NORDSIECK.—Rising sun magnetron.—Pág. 156.

NORMAN M. KROLL Y WILLIS E. LAMP, JR.—Resonant mode sof the rising sun and other unstrapped magnetron anode blocks.—Pág. 166.

A. M. SKELLET.—Palletron, a new electron resonator and its proposed application to the generation of potentials in the millionvolt range.—Pág. 187.

D. E. THOMAS.—Measurement of stress by means of X-rays.—Pág. 190.

OTTO J. GLASSER Y JOHN D. KRAUS.—Measured impedances of helical beam antennas.—Pág. 193.

C. E. HALL.—Dark-field electron microscopy. I. Studies of crystalline substances in dark-field.—Pág. 198.

B. M. AXILROD Y J. J. LAMB.—Tensile properties of rolled silver chloride.—Página 213.

Journal of the optical Society of America

38, 1-60 (1948).

W. F. MEGGERS.—Light wave of artificial mercury as the ultimate standard of length.—Pág. 7.

H. A. BUCHDAHL.—Algebric theory of the primary aberrations of the symmetrical optical system.—Pág. 14.

ROBERT B. MUCHMORE.—Optimum band width for two layer anti-reflection films.—Pág. 20.

J. H. WEBB.—Effect of light absorption on the shape of the photographic H. and D. curve.—Pág. 27.

H. G. JERRARD.—Optical compensators for measurement of elliptical polarization.—Pág. 35.

H. A. KLASENS, W. RAMSDEN AND COW QUANTIE.—Relation between efficiency and exciting intensity for zinc-sulphide phosphors.—Pág. 60.

38, 123-212 (1948).

LOYD A. JONES AND H. R. CONDIT.—Sunlight and skylight as determinants of photographic exposure. 1. Luminuos density as determined by solar altitude and atmospheric conditions.—Pág. 123.

SEIBERT Q. DUNTLEY.—Reduction of apparent contrast by the atmosphere.—Página 179.

T. J. ORGAN AND S. L. PARSONS.—Method of spectrographic analysis of impurities in materials for oxide coating of thermionic.—Pág. 191.

ALBERT ROSE.—Sensitivity performance of the human eye on an absolute scale. Página 196.

ROBERT C. HERMAN AND SHIRLEIGH SILVERMAN.—Cinema-spectrograph for photographing rapid spectral sequences.—Pág. 209.

A. ELLIOT, E. J. AMBROSE AND R. TEMPLE.—Polarization of infra-red radiation.—Pág. 212.

The review of Scientific intruments

V. 18, diciembre 1947.

INSTRUMENTOS CIENTIFICOS

Instituto Leonardo Torres Quevedo de Instrumental Científico

1.—CAMARA UNIVERSAL PARA RONTGENCRISTALOGRAFIA

DESCRIPCION

La diversidad de técnicas actualmente empleadas en el estudio de cristales y agregados cristalinos, requiere el uso de multitud de cámaras adecuadas a fines específicos, con lo que los laboratorios de investigación röntgenológico deberían aumentar de manera exorbitada el número de sus utensilios de trabajo. Por otra, el empleo de diversas cámaras apropiadas a un sólo método acarrean el inconveniente de requerir operaciones de centrado, muchas veces engorroso, para cada una de ellas. Para subsanar todos estos inconvenientes, se han venido construyendo con éxito creciente, cámaras universales, que, si bien no permiten todas las técnicas posibles con un solo aparato, cosa, por otra parte inútil, permiten realizar, sólo por cambio de chasis fotográficos, técnicas no excesivamente dispares. Las más parecidas son todas aquellas que se basan en estos dos principios:

a) Preparado fijo y placa plana.

b) Preparado móvil y placa fija.

El primer método fué el primitivamente ideado por Laue. En el segundo principio se basan todas las técnicas que emplean cristal giratorio u oscilante y polvo cristalino.

La cámara universal construída en el I. T. Q. (fig. 1) permite todas estas técnicas con la mayor comodidad.

El centrado de la muestra, cristal o tubito con polvo, se realiza por medio de una cabeza goniométrica situada en el extremo superior de un eje vertical, centrado a su vez, sobre un limbo horizontal dividido en grados, al cual puede imprimírsele un movimiento continuo de rotación, mediante una polea y transmisión funicular, o bien un movimiento uniforme de vaivén.

Las oscilaciones se logran imprimir al eje, y, por tanto, al cristal, mediante una palanca solidaria con aquél y que por su extremo libre se apoya sobre una excéntrica en forma de cardioide, mantenida en rotación por un motorcito eléctrico, cuya velocidad puede variarse mediante un reostato progresivo de discos de carbón. Un juego de tres cardioides permiten obtener oscilaciones de 5°, 15° y 25° respectivamente.

La película puede montarse en chasis metálico plano, normal al haz primario, a distancia de 23,7 mm. del eje de giro, mediante un soporte cambiable. Un pequeño plomo, situado exactamente en el lugar de incidencia del haz primario, evita efectos de difusión en la película y permite situar exactamente,

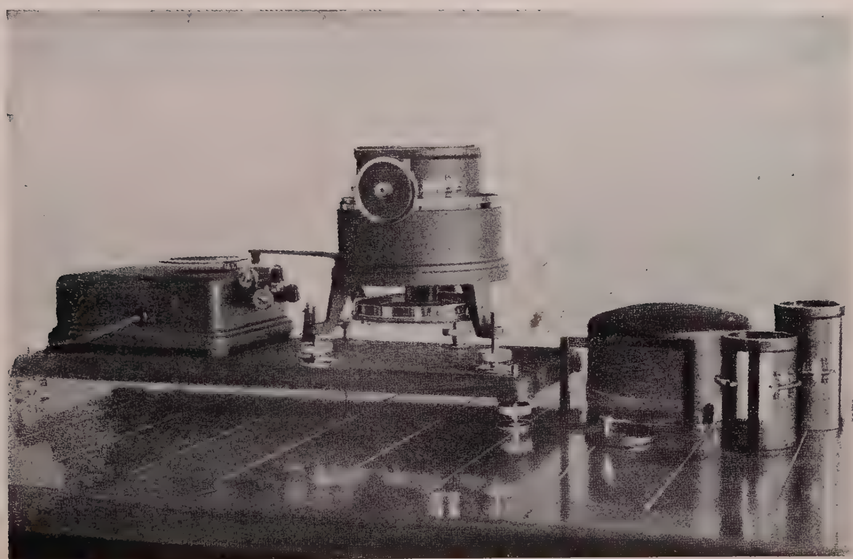


Figura 1

la posición del haz primario en la película. Aquel soporte puede substituirse por un chasis, también metálico, cilíndrico, de 57,3 mm. de diámetro o por otro de 114,6 mm., con lo que se logra la equivalencia de 1 mm. de película —dos grados, o 1 mm.—un grado. Este último chasis, con posibilidad de película menor está especialmente adoptado para los estudios de polvos cristalinos. También existe otro chasis de 57,3 mm., para película pequeña, especial, así como para estudios de polvo cristalino.

El colimador, telescopizable, protegido en su parte interna con un disco plano, delimita un hoz röntgen de 0,5 mm. de diámetro. El conjunto queda protegido contra cualquier posible radiación reflejada por una cubierta desmontable, de latón.

En resumen, con esta cámara pueden usarse, sin cambiar la muestra, los siguientes métodos:

a) Con polvo
- Placa plana. Método Debye.
- Placa cilíndrica. Método Debye-Scherrer-Hull.

b) Con cristal
- 1. Movible.
  - 1'. Giratorio. Método Polanyi.
  - 1''. Oscilante.
    - Método Schiebold.
    - Método Bragg (fotográfico).
- 2. Fijo, placa plana. Método Laue.

tanto 1' como 1'' pueden obtenerse con placa plana o película cilíndrica.

2.—RECEPTOR DE SEÑALES HORARIAS. MODELO NUM. 1425-101-001

DESCRIPCION

Este aparato (fig. 2) consta de dos secciones principales: una de ellas destinada a la recepción de las ondas cortas y normales y la otra para ondas largas.

Esta última sección responde a un circuito de reacción con un paso en alta frecuencia en que se emplea la válvula «6K7», que tiene por misión conseguir una mayor sensibilidad. Este paso va seguido de un detector de reacción, que emplea también la válvula «6K7», pero en conexión triodo.

La parte correspondiente a la audiofrecuencia es común a las dos secciones y consta de un preamplificador con válvula «6F5» y una amplificadora de potencia por haz electrónico «6V6», siendo comunes a ambas secciones el control de volumen y el corrector de tono.

Un conmutador de tres posiciones con juego de luces combinadas selecciona longitudes de onda de 17.000 a 20.000 metros en la primera posición, de 2.500 a 3.500 metros en la segunda y de 700 a 2.750 metros en la tercera, y estos cambios de longitud de onda son determinados por variación de capacidad en los circuitos sintonizados, con lo que se consigue un ensanche de banda en la primera y segunda posición de trabajo, facilitando de esta forma la captación de las emisoras que radian en dicha longitud de onda.

La sección destinada a receptor de onda normal y corta es un superheterodino.

Este aparato va también equipado con un «tamden» triple de 410 picofaradios destinado para el oscilador local, preselector y sintonía.

La heterodinación de frecuencia se realiza con la válvula «6A8» seguida de un paso de frecuencia intermedia (FI) con válvula «6K7». El detector es un doble diodo «6H6», del cual un diodo se emplea como detector y el otro para actuar sobre el control automático de sensibilidad (C.A.S.).

Ya hemos dicho que la parte de audiofrecuencia es común a las dos secciones y la conexión a cada una de ellas se efectúa por medio del conmutador de dos posiciones.

Con objeto de recibir las estaciones telegráficas que transmiten con trenes de ondas continuas se ha instalado un oscilador que entra en función cuando

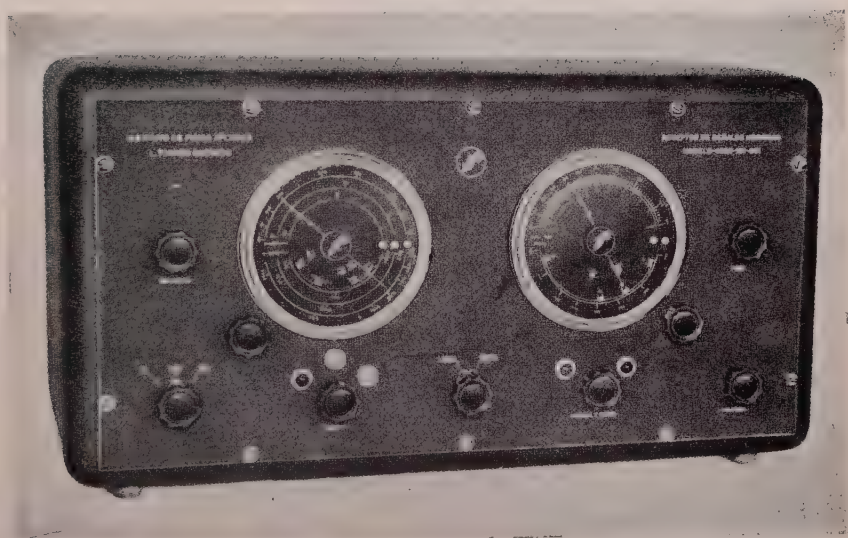


Figura 2

se desea actuando sobre el conmutador de tres posiciones que se colocará en la posición TEL. Dicho oscilador trabaja a una frecuencia de unos 3 kHz., mayor que la frecuencia intermedia (FI), obteniéndose una nota musical por interferencia.

El batido de estas dos frecuencias se efectúa inyectando la frecuencia del oscilador local al diodo que actúa como detector.

El altavoz que se suministra con el aparato es «Telefunken» de imán permanente.

Un conmutador de dos posiciones con juego de luces *roja* y *verde* pone en funcionamiento el receptor en corta y normal, respectivamente. La frecuencia de trabajo en corta es de 6 a 18 MHz., o sea, de 16 a 50 metros, y la normal de 550 a 1.500 kHz., que corresponde a una longitud de onda de 200 a 545 metros.

COMUNICACIONES PRESENTADAS A LA V REUNION ANUAL DE LA REAL SOCIEDAD ESPAÑOLA DE FISICA Y QUIMICA

1.—L. Bru y M. Cubero.—*Analogías entre la difracción de la luz y de los rayos X.—I.*

Iniciando un estudio del nuevo tipo de microscopio de rayos X, ideado por Bragg, se relacionan, en el presente trabajo, los fenómenos de difracción de la luz y de los rayos X. Se han interpretado los diagramas de difracción de redes planas y redes formadas por una trama tejida, calculando la forma de las redes a partir de los datos de dichos diagramas. Aplicando el método de Fourier, empleado en la determinación de estructuras cristalinas mediante los datos de la difracción de los rayos X, se ha llegado a resultados en todo conformes con las ideas previstas.

2.—Antonio Due Rojo, S. J.—*La componente vertical descendente del viento, en Granada.*

Utilizando los primeros resultados obtenidos con un nuevo anemógrafo vertical, construído en el Observatorio de Cartuja, se analiza la marcha general y curva de frecuencia de la corriente atmosférica descendente vertical y se compara con la ascendente y horizontal, estudiadas ya en otros trabajos; en particular se presentan algunos casos anómalos, que aparecen relacionados con cambios bruscos de régimen atmosférico.

3. A. Gimeno Riutort, S. J.—*La componente vertical descendente del viento, en Granada.*

Análisis de los primeros resultados obtenidos mediante un nuevo anemógrafo vertical construído en el Observatorio de la Cartuja.

4.—J. Sánchez-Cordovés Maroto.—*La teoría general de redes con electrónica y sus aplicaciones al cálculo y gobierno automáticos. Utilización de la técnica de modulación de frecuencia en las calculadoras electrónicas.*

El desarrollo de la técnica de modulación de frecuencia ha traído consigo la materialización de muchas relaciones entre las magnitudes eléctricas que son de suma utilidad para las calculadoras electrónicas y de las cuales se estudian algunas en este trabajo.

5.—A. González del Valle.—*La teoría general de redes con electrónica y sus aplicaciones al cálculo y gobierno auntomáticos. Tubos funcionales. Estudio especial del tubo hiperbólico-parabólico (bajo la acción de dos corrientes produce otra proporcional al cuadrado de la primera dividido por la segunda).*

El cálculo y gobierno automáticos tienen por objeto respectivamente determinar de un modo automático los valores de las incógnitas de un problema o imponer los apropiados a determinadas magnitudes del proceso. Tanto uno como otro son ya fundamentales en cualquier técnica desde la agricultura hasta la energía atómica, y podrán realizarse en un amplio campo de problemas empleando las redes con electrónica debido a la variedad y complejidad de las relaciones con que pueden ligarse las magnitudes eléctricas con el empleo de estas redes; a la precisión de estas relaciones y muy especialmente a la extraordinaria rapidez con que pueden cambiar de valor las variables. Para hacer posible estas relaciones consideramos de suma utilidad lo que hemos llamado tubos electrónicos funcionales, es decir, aquellos que producen en placa una corriente I ligada con la señal i, mediante una relación $I = F(i)$, elegida a voluntad.

Cada función F exige en principio un tipo de tubo, pero al plantearnos el problema de encontrar el menor número de tipos con los cuales y debidamente combinados poder obtener cualquier función, hemos encontrado que se reducen a dos. Esto facilita enormemente la resolución de los problemas del cálculo y gobierno automáticos y la simplificación es notable por ser precisamente estos dos tubos el ordinario $(I = k \cdot i)$ y el hiperbólico-parabólico $\left(I = K \frac{4^2}{i_2}\right)$, que son los de más fácil construcción.

6.—José W. Otte y E. Sánchez Serrano.—*La mecánica cuántica y sus relaciones con la biología.*

En la presente nota se señalan directrices actuales y posibles para una adaptación necesaria de los resultados recientemente obtenidos tanto de modo especulativo como experimental, a la investigación de la dinámica de los seres vivos. Se insiste en la explicación por la mecánica cuántica de los procesos microfísicos, que comprenden todos los estados energéticos funcionales y vitales. Métodos experimentales posibles que sirvan de base a los estudios especulativos y que requieren la acción conjunta de físicos y biólogos.

7.—Ramón Ortiz Fornaguera.—*Sobre una propiedad de los operadores estadísticos. Proyecciones del operador estadístico de un sistema compuesto sobre los sistemas componentes.*

En los «Mathematische Grundlagen der Quantenmechanik», de J. von Neumann (págs. 229-231), se establece un teorema que afirma la existencia en un sistema I + II compuesto de otros dos I y II de una magnitud física Φ tal que si se mide en I la magnitud que en él corresponde a Φ, la magnitud que Φ induce en II está unívocamente determinada. La demostración, sin embargo, es errónea, aunque el teorema es cierto. Se da una demostración del mismo que estimamos correcta.

8.—RAMÓN ORTIZ FORNAGUERA.—*Densidades escalares y leyes de conservación.*

En cualquier espacio riemanniano o pseudorriemanniano, en particular en el espacio de la relatividad general, la derivada hamiltoniana en el sentido de Eddington de un invariante (escalar) fundamental, esto es, de un invariante función sólo de las componentes del tensor fundamental de la métrica g_{ik}, es un tensor cuya divergencia se anula idénticamente, anulación idéntica que expresa la ley de conservación del ente físico representado por dicho tensor. Se demuestra en la presente comunicación que este resultado es un caso particular de una relación más general a que satisfacen las derivadas hamiltonianas de las densidades escalares de la forma

$$\mathfrak{A}\,(a_{ik},\ \partial_m a_{ik} \ldots \partial^p_{m_1 \ldots m_p} a_{ik}).$$

donde a_{ik} es un tensor covariante cualquiera, independientemente de toda consideración afín o métrica. De este resultado se deduce que existen infinitas conexiones afines en las que el pseudotensor densidad P^{ik} derivada hamiltoniana de una densidad escalar de aquella forma dada posee la propiedad de anularse idénticamente su divergencia y que en ciertas condiciones el conocimiento del valor de tal derivada, de la torsión del espacio y de las geodésicas determina unívocamente la conexión afín del espacio. En particular, si es nula la torsión la conexión afín está determinada por las geodésicas y la ley de conservación $\Delta_i P^{ik}=0$, supuesto que se cumplan las condiciones a que antes hemos aludido.

9.—J. M. OTERO Y L. PLAZA.—*Un nuevo método de precisión para determinar índices de refracción por inmersión de lentes o piezas acabadas.*

Se describe un método de inmersión en el que la cubeta es un prisma hueco de 60° donde se introduce la pieza a examinar y se coloca sobre la plataforma de un espectrogoniómetro de precisión. La mezcla de los líquidos dos tipos se hace en el mismo prisma y se varía hasta la igualación exacta de su índice con el de la pieza. La precisión del método es debida a que la comprobación de la igualación de índices se hace interferencialmente y a que el índice de la mezcla líquida se mide simultáneamente a dicha igualación, con lo que se evitan errores debidos a cambios del índice con la temperatura, evaporación, etc.

10.—J. M. OTERO, M. RÍOS Y L. PLAZA.—*Contribución de la aberración de apertura monocromática a la miopía nocturna.*

La aberración esférica del ojo fué inicialmente considerada como causa principal de la Miopía Nocturna. Posteriores investigaciones de la Escuela de Madrid fijaron su aportación al fenómeno en una cuantía pequeña. Ultimamente Tousey en América vuelve sobre dicha hipótesis partiendo de los resultados de una técnica propia. Por ello se han realizado una serie de experiencias usando luz monocromática y pupilas artificiales de distintos diámetros para determinar la aportación de la aberración en la Miopía Nocturna.

Los resultados comprueban indudablemente que la ametropía nocturna apenas cambia su valor para toda la gama de aperturas pupilares, siendo la pequeña variación de sentido contrario, es decir, tendiendo a disminuir la Miopía Nocturna conforme aumenta el diámetro pupilar.

11.—L. Föppl y L. Villena.—*Estudio fotoelástico de rótulas a compresión.*

Por distintos autores ha sido estudiado el problema de rótulas sometidas a esfuerzos de presión o tracción, tanto teórica como experimentalmente.

El estudio de rótulas a compresión, que tiene una gran importancia práctica, no había sido tratado anteriormente debido a su complicación teórica por presentarse los fenómenos de plasticidad.

En esta primera nota se dan los resultados obtenidos en la fase inicial del estudio fotoelástico del problema.

12.—C. Morais.—*Aberraciones de séptimo orden.*

Se aplica un método de estudio de las láminas planas—ya publicado en otra parte—para obtener el número y la forma de las aberraciones de séptimo orden y para hacer su estudio comparativo con las de tercero y quinto orden.

Se indica, después, un método trigonométrico para obtener los coeficientes de las aberraciones de séptimo orden siguiendo un criterio análogo al expuesto por el autor en los estudios relativos al quinto orden publicados en otra parte.

13.—C. Morais.—*Comprobación de rayos oblicuos cualesquiera.*

Conocidas las coordenadas l_1, m_1, p_1, q_1 del rayo incidente que aparecen en las ecuaciones:

$$y = l_1 x + p_1$$
$$z = m_1 x + q_1$$

el autor da un método rápido para encontrar las coordenadas equivalentes del rayo reflejado, recurriendo para ello a un sistema de coordenadas con el origen en el centro de curvatura del dioptrío; de este modo la relación

$$\frac{q_1}{p_1}$$

es la tangente del ángulo ψ que forma con el eje y de referencia, la intersección del plano incidente con el plano de frente que pasa por el centro de curvatura.

De esta manera, si se conoce el punto objeto, esta intersección determina, sin más, el plano de incidencia.

Se dan, después, los esquemas de cálculo que se pueden aplicar para la comprobación de los sistemas.

14.—C. MORAIS Y J. CASAS.—*Distribución de la luz en un plano de frente en presencia de la aberración esférica de tercer orden.*

Partiendo del desarrollo en serie de potencias de la aberración esférica en los sistemas centrados, se estudia la cáustica de tercer orden, la iluminación que en un plano normal al eje óptico produce en una zona de sistema y la función total de la distribución de luz para toda la apertura del mismo.

15.—L. VILLENA.—*Una explicación sencilla, rigurosa y vectorial del movimiento rotatorio.*

Ordinariamente se acostumbra a ir introduciendo los distintos elementos al movimiento rotatorio en los diferentes capítulos de la Mecánica a medida que son necesarios en su exposición.

Se logra una mayor sencillez y rigor, a la par que una mejor comprensión por el alumno, introduciendo de una sola vez los conceptos relacionados con dicho movimiento para el caso de la partícula. En Estática y Dinámica del cuerpo rígido pueden generalizarse los resultados obtenidos.

16.—C. MORAIS Y A. DURÁN.—*Estudio del objetivo apocromático.*

Planteadas las ecuaciones que deben quedar satisfechas para que un sistema de tres lentes sea apocromático, se estudian los criterios más convenientes para la elección de los vidrios haciéndolo por varios procedimientos que permiten obtener las focales mejores para las lentes que constituyen el objetivo.

17.—C. SÁNCHEZ DEL RÍO.—*Generalización del concepto de isoplasia.*

La condición del seno de Abbe está basada en la idea de estigmatismo (representación puntual). En sistemas aberrantes esta idea no tiene sentido y para poder deducir una condición de estabilidad que sustituya a la del seno que resulta inservible, es necesario dar un nuevo concepto que reemplace al de corrección estigmática. Una generalización de este tipo ha sido realizada por Staeble y Lihotzky con el nombre de corrección isoplanética; dentro de este estado de corrección se exige que se conserve la forma de la cáustica para pequeños desplazamientos del objeto. Otra generalización es la propuesta en el presente trabajo: se introduce un estado de corrección tal que, para pequeños desplazamientos del objeto, se conserve el círculo de dispersión (sección mínima de la cáustica). A partir de este concepto se deduce una condición que resulta menos restrictiva que la de isoplanasía.

18.—C. SÁNCHEZ DEL RÍO.—*Nota sobre la relación entre el poder separador de un instrumento óptico y el umbral diferencial del sistema perceptor.*

El poder de resolución de un instrumento óptico viene limitado por la difracción, ya que al superponerse las manchas de difracción producidas por dos puntos próximos, la distribución de la luz presenta dos máximos y un mínimo

cuya diferencia debe ser mayor que el umbral diferencial del receptor (ojo, placa fotográfica, etc.), si se quiere que los dos puntos sean discernibles. En la presente nota se ofrece una tabla de la correspondencia que existe entre el umbral diferencial del receptor y el poder de resolución; dicha tabla ha sido obtenida mediante el cálculo de la marcha de la función de distribución de la luz en la superposición de dos figuras de difracción.

19.—José García Santesmases y Justo Mañas Díaz.—*Estudio teórico y experimental de algunos circuitos de diferenciación e integración.*

Se realiza un estudio teórico de diversos circuitos para derivar e integrar, determinándose para cada tensión de frecuencia y forma definidas, los parámetros para la mejor utilización de aquéllos. Se exponen los resultados experimentales obtenidos con diferentes ondas de tensión.

20.—José García Santesmases y Justo Mañas Díaz.—*Aplicaciones del microscopio electrónico a la bacteriología.*

Se describen brevemente las técnicas de microscopía electrónica empleada en Bacteriología, con las aportaciones complementarias a las mismas que han sido sugeridas por la experiencia. Se expone el primer estudio sistemático realizado con el microscopio electrónico del Instituto, sobre el *mycobacterium leprae*, presentándose varias microfotografías de estas bacterias en la que puede apreciarse su estructura íntima.

21.—José García Santesmases y Adolfo García Abrines.—*Medida de la amplificación del microscopio electrónico: curvas de calibrado.*

Se exponen, primero, los métodos generales que pueden utilizarse en la determinación de la amplificación del microscopio electrónico. A continuación se describen los procedimientos empleados para obtener las distintas curvas de calibrado del microscopio electrónico de este Instituto.

22.—Justo Mañas Díaz y Salvador Martínez Ferigle.—*Sensibilidad de las emulsiones fotográficas a la acción de los electrones.*

Se hace un estudio de la sensibilidad a los electrones, de las emulsiones fotográficas que se encuentran en el comercio. Se obtienen las curvas de sensibilidad relativa y se determina el tipo de emulsión más aconsejable en cada caso.

23.—Srta. M.ª de Aranzazu Vigón y R. Segovia.—*Contadores Geiger.*

ACTA DE LA SESION CIENTIFICA CELEBRADA EL DIA 1 DE MARZO DE 1948

Bajo la presidencia del Prof. Dr. Ríus da comienzo la sesión a las siete y treinta y cinco de la tarde.

Por el Secretario Sr. Durán es leída el acta de la sesión anterior, que se aprueba.

Seguidamente son admitidos como nuevos socios los señores siguientes:

D. José Serratosa Márquez, de Granada, presentado por los Sres. Gallas y Gutiérrez Ríos.

D. José Luis García Chicano, de Granada, presentado por los Sres. Gallas y Hoyos de Castro.

D. Juan de Dios López González, de Granada, presentado por los Sres. Gallas y Gutiérrez Ríos.

D. Bernardo Meléndez Meléndez, de Granada, presentado por los Sres. Gallas y Hoyos de Castro.

D. Cesare Morais, Italia, presentado por los Sres. Otero y Durán.

A continuación D. José María Otero Navascués resume un trabajo titulado «Daza de Valdés y rendimiento de los anteojos de observación».

Y no habiendo más asuntos de que tratar se levanta la sesión a las ocho y cinco de la tarde.

SECCION DE BARCELONA

SESION DEL DIA 10 DE FEBRERO DE 1948

Se abre la sesión a las siete de la tarde, en el aula de Química General de la Facultad de Ciencias, bajo la presidencia del Sr. Presidente de la Sección, profesor Dr. D. Isidro Pólit Buxareu.

El Sr. Secretario procede a leer el acta de la sesión anterior y a dar cuenta, una vez aprobada, de la propuesta de ingreso en la Real Sociedad del Instituto Nacional de Enseñanza Media «Montserrat», presentado por los señores Pascual Vila y Carreras Linares, que asimismo se aprueba.

Pasa a ocupar la Presidencia el Sr. Vicepresidente, profesor Raurich Sas, quien, después de reiterar al profesor Pólit, en nombre propio y en el de la Junta directiva y auditorio, su felicitación por el premio que le otorgó la Mesa del «Tercer Congreso Nacional de Industrias de la Pintura y Afines», por su trabajo de investigación sobre: «Examen de películas de pintura por el procedimiento de la radiografía por reflexión»; le manifiesta asimismo su agradecimiento al haber accedido a los deseos que expresó en nombre de todos el profesor Ibarz en la sesión anterior, solicitándole diera cuenta de dicho trabajo a la Real Sociedad.

Con tal motivo la Presidencia cede el uso de la palabra al profesor Pólit Buxareu, quien desarrolla el tema: «La radiografía por reflexión aplicada al examen de películas de pintura», manifestando, al iniciarlo, que expondrá dicha comunicación en forma de conferencia.

Empieza por recordar el autor los fenómenos que tienen lugar cuando un haz de rayos X atraviesa un cuerpo, deteniéndose especialmente en la absorción foto-eléctrica por constituir el fundamento de la *radiografía por reflexión*; procedimiento ideado por M. J. Trillat para el examen de superficies metálicas.

A continuación dió cuenta el Dr. Pólit de sus propias experiencias con metales y con compuestos metálicos, haciendo notar que el procedimiento en cuestión puede utilizarse para averiguar la naturaleza de los pigmentos minerales presentes en una película de pintura, al menos en varios casos.

También demostró que la radiografía por reflexión puede servir para el examen de obras de arte pictórico, del decorado de objetos de vidrio y de porcelana.

Tan interesante disertación, seguida con creciente atención por el auditorio, fué acompañada de varias proyecciones, en su mayoría demostrativas de resultados obtenidos personalmente por el distinguido profesor, como consecuencia de su asidua labor investigadora.

No habiendo más asuntos que tratar se levantó la sesión, siendo las veinte horas cincuenta minutos.

SESION DEL DIA 8 DE MARZO DE 1948

Se abre la sesión a las siete de la tarde en el Aula de Matemáticas de la Facultad de Ciencias, bajo la Presidencia del Profesor Dr. D. Isidro Pólit Buxareu.

Leída por el señor Secretario el acta de la sesión anterior y aprobada, cede el uso de la palabra la presidencia al Profesor Dr. D. Francisco Buscarons Ubeda, quien da cuenta seguidamente de un trabajo de investigación original efectuado en colaboración con el Profesor Dr. D. Eladio Loriente González sobre el tema «Aplicaciones analíticas de la orto-dianisidina. Reacciones de oxidación.

Describen los autores las reacciones de oxidación que permiten el empleo de dicha amina como reactivo para la identificación cualitativa de los iones y elementos oxidantes que con ella producen coloraciones intensas y que según el medio son azules o rojas. Indican asimismo las técnicas y sensibilidad para el reconocimiento de plomo, oro, cerio, vanadio, manganeso, permanganato, cromato, persulfato, ferricianuaro, cianuro, ácido ósmico y halógenos.

A continuación la señorita María Luisa Josien, Doctora en Ciencias Físicas y Profesora del Instituto Francés de Barcelona, presenta un trabajo de investigación original titulado «Descomposición del ácido hipoyodoso en las disoluciones argénticas de yodo. Estudio cinético. Ordenes de reacción».

La desaparición del ácido hipoyodoso en las disoluciones argénticas de yodo constituye una reacción cuya velocidad puede medirse y que se presta a la determinación del orden de reacción. Aplicando la doble noción de «orden en función del tiempo» y de «orden en el origen», adelantada por Mr. Letort, se observa que la descomposición del ácido hipoyodoso procede con un orden en función del tiempo igual a 2, cualquiera que sea la acidez del medio. Por el contrario, el orden en el origen varía, pasando progresivamente del valor 3 al valor 2, en el que se mantiene a partir de una acidez del medio equivalente a la determinada por 0,2 moles de ácido acético. Esta variación del orden en el origen parece indicar que la descomposición del ácido hipoyodoso puede efectuarse mediante dos mecanismos diferentes, según ocurra en medio neutro o en medio francamente ácido. En cambio, en los de acidez débil actuarían, por el contrario, los dos mecanismos simultáneamente y en proporciones respectivas variables con la acidez.

No habiendo más asuntos que tratar se levantó la sesión, siendo las veinte horas cuarenta y ocho minutos

SESION DEL DIA 12 DE ABRIL DE 1948

Se abre la sesión a las siete y cuarto de la tarde en el Aula de Matemáticas de la Facultad de Ciencias, bajo la Presidencia del Profesor Dr. D. Isidro Pólit Buxareu.

El señor Secretario procede a leer el acta de la sesión anterior, que es aprobada. Seguidamente cede la presidencia el uso de la palabra al Profesor doctor D. Francisco Buscarons Ubeda, para dar cuenta de un trabajo de investigación original en colaboración con D. J. L. Marín Malumbres. sobre «Determinaciones colorimétricas sin extracción previa. Nota II: Determinación del vanadio mediante la oxina».

Siguiendo en la busca de nuevos métodos de determinaciones colorimétricas que no requieran una previa extracción con un disolvente, los autores han estudiado la colorimetría del vanadio mediante el complejo que forma con la oxina, realizada hasta el presente extrayendo el dicho complejo con un disolvente no miscible con agua.

Se describe un nuevo procedimiento en el que puede hacerse uso del etanol, o de los monoéteres del etilenglicol y con que es posible la determinación cuantitativa del vanadio sin extracción previa con un límite de sensibilidad de 0,4 gammas y un límite de disolución de 1/10.000.000.

No habiendo más asuntos que tratar se levantó la sesión, siendo las veinte horas dieciocho minutos.

SERVICIO DE BIBLIOTECA Y FOTOCOPIAS

Reorganizada la Biblioteca en magníficos locales, que permiten el trabajo cómodo de los socios que deseen consultar las revistas o libros de la misma, la Junta directiva de esta Real Sociedad expresa el acuerdo, hace años tomado en bien de la buena marcha de la Biblioteca, de no permitir sacar de la misma ningún ejemplar por no tenerlos duplicados y evitar el deterioro de las revistas y libros.

Estará abierta todos los días laborables de 10,30 a 13,30 y de 16 a 18 horas, excepto los sábados por la tarde. Para informes llamar al teléfono 23-80-96.

Para los señores socios, especialmente de provincias, que no puedan acudir a la misma, se ha establecido el servicio de fotocopias de trabajos originales de Física y Química publicados en libros y revistas existentes en la Biblioteca de esta Real Sociedad y la del Instituto Nacional de Física y Química. Por este servicio esta Real Sociedad sólo exige el abono de los gastos que ocasiona el material empleado en la obtención de la fotocopia. El precio de la fotocopia de 18 × 13 cm. es de cuatro pesetas.



Nuevas Gráficas, S. A.-T.° 23 30 29